

天津财经大学  
博士学位论文

# 非寿险准备金风险度量模型 与方法研究

一级学科：应用经济学

二级学科：统计学

专业方向：风险管理与精算学

论文作者：高磊

指导教师：刘乐平

二〇一六年五月

分类号：  
密 级：

博士学位论文

# 非寿险准备金风险度量模型 与方法研究

**Research on Measurement Models and Methods  
Of Non-life Reserve Risk**

所属学院：\_\_\_\_\_ 理工学院 \_\_\_\_\_

所在系别：\_\_\_\_\_ 统计学系 \_\_\_\_\_

年 级：\_\_\_\_\_ 2013 级 \_\_\_\_\_

学 号：\_\_\_\_\_ 2013710025 \_\_\_\_\_

论文作者：\_\_\_\_\_ 高 磊 \_\_\_\_\_

## 天津财经大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文《非寿险准备金风险度量模型与方法研究》，是本人在导师指导下，在天津财经大学攻读学位期间进行研究所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，不包含任何他人已发表或撰写过的研究成果。对本论文研究工作做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。

本声明的法律责任完全由本人承担。

学位论文作者签名：

年 月 日

## 天津财经大学学位论文版权使用授权书

本人完全了解天津财经大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，即：按照学校要求提交学位论文的印刷版本和电子版本；同意学校保留论文的印刷版本和电子版本，允许论文被查阅和借阅。本人授权天津财经大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索；可以采用影印、缩印或其他复制手段保存或汇编论文；可以向有关机构或者国家部门送交论文的印刷本和电子版本；在不以赢利为目的的前提下，学校可以复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

作者签名：

日期： 年 月 日

导师签名：

日期： 年 月 日

## 内容摘要

2016年1月1日,历经5年之久,对整个欧洲保险业具有约束力的 Solvency II (欧盟偿付能力 II) 正式生效,与此同时中国保险业进入“偿二代”实施过渡期也满一年。以风险为导向的偿付能力监管体系要求对保险公司面临的风险进行全面、精细的度量,准备金风险作为保险风险的重要组成部分,其准确计量对增强保险公司偿付能力,提高保险公司风险管理水平具有重要意义。国内外保险监管机构和保险公司越来越重视准备金风险的度量工作。然而,现有研究较多关注准备金估计模型与方法,较少涉及准备金风险度量问题。本文从影响准备金风险度量的因素出发,结合已有的准备金评估模型与方法,紧紧围绕非寿险准备金风险这一主题开展研究。具体而言,本文重点解决四个问题:(1) 非寿险一年期准备金风险度量;(2) 残差相关条件下的非寿险准备金风险度量;(3) 赔款数据相关条件下非寿险准备金风险度量;(4) 考虑模型不确定性对准备金风险的影响。

首先,本文通过一个直观实例阐述非寿险一年期准备金风险的含义,引出一年期准备金风险的刻画工具:赔付进展结果,并探讨在贝叶斯对数正态模型下获得赔付进展结果预测分布的随机模拟方法。其次,为避免由残差相关性引发的准备金风险度量偏误问题,本文基于多重假设检验理论与错误发现率控制过程,给出检验和解决残差相关性问题的方法,对残差相关性引起的准备金风险波动进行分析。残差相关的本质是赔款数据相关,本文进一步在独立泊松模型基础上,添加相关随机效应,构建了描述赔款数据相关性的条件自回归泊松模型,并采用贝叶斯方法对模型进行估计。最后,本文研究了模型不确定性对非寿险准备金风险的影响,以 Loglogistic 增长曲线模型和 Weibull 增长曲线模型为例,创新性地提出利用贝叶斯模型平均对两个模型的结果进行加权平均,不仅得到综合两个模型结果的准备金估计值,而且还能得出模型不确定性视角下的准备金风险度量值。本文开展的一系列工作,有望丰富非寿险准备金风险度量的研究成果,进一步拓展准备金评估的研究领域,并为监管机构和保险公司提供理论支持和实践参考。

**关键词:** 非寿险准备金风险 一年期观点 残差相关 模型不确定性

## Abstract

On January 1, 2016, after 5 years, the Solvency II taking charge of insurance industry through Europe took effect, at the same time China's insurance industry has been into the transitional period of "second generation of solvency" for a full year. Risk oriented insurance regulatory system requires a comprehensive and detailed measurement of insurance risk. Non-life reserve risk, as an important part of insurance risk, its accurate measure is of great significance for insurance company to strengthen the solvency and improve the level of risk management. Insurance regulators and insurance companies pay more and more attention to reserve risk measurement. However, existing research still focus on reserve estimates and pay less attention on reserve risk measurement issues. This paper follow hot issues of the insurance regulatory system reform and do some research on measurement models and methods of non-life reserve risk. Specifically, this paper solve four problems: (1) the measurement of non-life one year reserve risk ; (2) the measurement of reserve risk with residuals dependable structure; (3) the measurements of reserve risk in case of correlated claims data; (4) the influence of model uncertainty on reserve risk.

Firstly, we clarify the meaning of non-life one year reserve risk through an intuitive example, introduce the concept of claims development result, and discuss simulation approach to obtain the predictive distribution of CDR based on the bayesian lognormal model. Secondly, in order to avoid reserve risk measurement errors caused by residual correlation, we use multiple hypothesis testing and the false discovery rate control process to solve this problem. Residual correlation is caused by data correlation, so on the basis of independent poisson model, we add the relevant random effects and develop the conditional autogressive poisson model which can describe the correlation in the claims data, and then estimate the model by bayesian method. Finally, we studies the influence of model uncertainty on the non-life reserve risk. Loglogistic growth curve model and Weibull growth curve model are common in claims reserving. We use bayesian model average to average the results of two models by their posterior model probabilities. In the end, we not only combine results of two models, but also obtain the reserve risk measurement under the perspective of model uncertainty. These work is expected to enrich the research of non-life reserve risk, further expand the field of claims reserving, and provide theoretical support and practical reference for the regulators and the insurance company.

**Keywords: non-life reserve risk; one-year perspective; residual dependable structure; model uncertainty**

# 目录

内容摘要 .....	I
Abstract .....	II
第 1 章 引言 .....	1
1.1 选题背景与研究意义.....	1
1.1.1 选题背景.....	1
1.1.2 研究意义.....	3
1.2 国内外研究现状.....	3
1.2.1 文献综述.....	3
1.3 本文内容结构.....	6
1.3.1 研究的基本思路.....	6
1.3.2 主要内容和结构安排.....	9
1.3.3 论文主要创新点.....	11
第 2 章 基于贝叶斯对数正态模型的一年期准备金风险度量研究. 12	
2.1 非寿险一年期准备金风险.....	12
2.1.1 一年期准备金风险的直观示例.....	12
2.1.2 一年期准备金风险的描述工具：赔付进展结果.....	13
2.1.3 CDR 的预测分布 .....	15
2.2 一年期准备金风险度量：基于贝叶斯对数正态模型和 CDR 的预测分布 16	
2.2.1 贝叶斯对数正态模型设定.....	16
2.2.2 参数后验估计、最终赔款估计以及准备金估计.....	18
2.2.3 CDR 预测分布的随机模拟步骤 .....	19
2.3 实证研究.....	21
2.3.1 赔付数据来源与先验参数设定.....	21
2.3.2 参数估计、最终赔款估计以及准备金估计.....	21
2.3.3 CDR 的预测分布 .....	22
2.4 本章小结.....	25
第 3 章 残差相关条件下非寿险准备金风险度量研究.....	27
3.1 Bootstrap 方法应用中的残差相关性问题 .....	27
3.1.1 Bootstrap 方法在 ODP 模型中的应用 .....	27
3.1.2 残差三角形相关性问题.....	30
3.2 残差三角形相关性的多重假设检验与两阶段分区域 Bootstrap 方法. 32	
3.2.1 残差三角形相关性的多重假设检验与 FDR 控制.....	32
3.2.2 两阶段分区域 Bootstrap 方法.....	35
3.3 实证结果.....	37
3.3.1 ODP 模型参数估计结果 .....	37
3.3.2 两阶段分区域 Bootstrap 方法与传统 Bootstrap 方法的比较... 38	
3.4 本章小结.....	41

第 4 章 赔款相关条件下非寿险准备金风险度量研究.....	43
4.1 ODP 模型与赔款数据相关性问题的.....	43
4.1.1 ODP 模型：一种新的定义方式.....	43
4.1.2 赔款数据相关性的探索性分析.....	45
4.1.3 考虑相关性的条件自回归泊松模型.....	47
4.2 条件自回归泊松模型的贝叶斯估计.....	49
4.2.1 参数先验分布设定.....	49
4.2.2 参数后验估计、准备金估计与风险度量.....	50
4.2.3 基于 DIC 的模型评价.....	51
4.3 实证研究.....	52
4.3.1 数据来源.....	52
4.3.2 条件自回归模型的贝叶斯估计.....	53
4.3.3 模型评价与比较.....	56
4.4 本章小结.....	57
第 5 章 模型不确定性对非寿险准备金风险度量的影响研究.....	59
5.1 模型不确定性与贝叶斯模型平均方法.....	59
5.1.1 关于模型不确定性的两个例子.....	59
5.1.2 贝叶斯模型平均方法的发展历程、基本原理与应用难点.....	65
5.2 贝叶斯模型平均在两种非线性增长曲线模型组合中的应用.....	68
5.2.1 准备金评估的两种非线性增长曲线模型.....	68
5.2.2 单个增长曲线模型的贝叶斯估计.....	71
5.2.3 两个增长曲线模型的贝叶斯模型平均.....	76
5.3 实证研究.....	77
5.3.1 数据来源.....	78
5.3.2 单个增长曲线模型的贝叶斯估计.....	79
5.3.3 两个增长曲线模型的贝叶斯模型平均.....	83
5.4 本章小结.....	88
第 6 章 总结与展望.....	89
6.1 研究成果总结.....	89
6.2 进一步的研究方向.....	89
参考文献.....	91
附录.....	98
附录 A MCMC 方法直观实例.....	98
附录 B 后验分布密度的求解方法.....	103
附录 C 本文数据及程序资源.....	105
攻读博士学位期间发表的学术论文.....	106
后记.....	107



# 第 1 章 引言

## 1.1 选题背景与研究意义

### 1.1.1 选题背景

自 2008 年金融危机之后，业界和学界更加关注金融机构运行中的风险。对经营非寿险业务的保险公司来说，准备金一般是其资产负债表中最大的一笔负债。精算学者利用先进的风险管理技术和现代统计方法，在非寿险准备金评估方面做了大量的研究，取得丰富的研究成果。然而，无论是对于保险公司本身，还是对于保险监管机构，他们不再满足于单一的准备金估计值或置信区间，而是希望从风险管理的角度，对准备金估计的风险进行全面、精细、准确地度量和有效控制。因此，关于非寿险准备金风险度量模型与方法的研究，是非寿险精算学者新的分析挑战。

从准备金评估向准备金风险度量的转变，与保险监管体系不断改革发展的国际国内背景是分不开的。1994 年，欧盟保险监管委员会启动 Solvency I 项目，2004 年，Solvency I 项目作为欧盟保险监管的最低标准正式实施。Solvency I 单纯通过资本衡量一家保险机构的偿付能力，因此常称 Solvency I 为规模导向而非风险导向。随着保险市场的不断变化，Solvency I 在执行过程中的弊端逐渐显现出来。为此，欧盟保险监管委员会启动了 Solvency II 项目，在总结 Solvency I 实施经验的基础上，力求设计一套以风险为导向的监督体系，精细地对保险公司的风险进行识别和量化。

2008 年国际金融危机爆发，金融市场的全球化、人口老龄化、恐怖袭击和巨大自然灾害的经常化等因素对保险市场的发展和监管带来严峻的挑战，欧盟加快了以风险为导向的 Solvency II（欧盟偿付能力 II）的实施进程。欧洲保险与企业年金监督管理委员会 CEIOPS 组织了五次大规模的量化影响测试，为 Solvency II 的制定实施提供技术支持。2016 年 1 月 1 日，历经五年之久，适用于 28 个欧盟成员国，对整个欧洲具有约束力的欧盟偿付能力 II 终于正式生效。

中国保险业在偿付能力体系的构建过程中也进行着不懈的探索。2012 年 3 月，为更加科学全面地衡量保险公司所面临的风险水平和风险管控能力，中国保监会启动了第二代偿付能力制度监管体系（即“中国风险导向偿付能力体系”，简称“偿二代”）的建设工作。历经三年的体系制度建设及行业试点测试，2015 年 2 月 13 日，保监会向各保险集团、保险

公司和资管公司印发偿二代 17 项监管规则以及过渡期内试运行的方案<sup>①</sup>，保险业自 2015 年正式进入偿二代实施的过渡期。

综合来看，无论是欧盟的 Solvency II，还是中国的“偿二代”，二者均以对保险公司的风险监管为核心。以风险为导向的监管机制将对保险公司的风险进行全面识别、科学计量和有效防范。两个体系均从三支柱框架对保险公司的偿付能力进行监管，分别是：定量资本要求、定性监管要求和市场约束机制。定量资本要求对一系列可量化的风险进行量化，如保险风险、信用风险、市场风险等。对于难以量化的风险，如操作风险、战略风险、声誉风险、流动性风险等，则考虑在定性监管要求里予以细化。而对于难以监管的风险，则采用市场约束、市场纪律、信息披露等市场力量加以约束。以风险为导向的监管体系不仅推动保险公司更加精细地管理风险，而且建立了风险管理经济激励机制，督促保险公司不断提升风险管理能力。

在风险监管的三支柱中，定量资本要求处于首要位置，而其中关于保险风险的定量监管更是重中之重。保险风险，是指由于赔付水平、费率水平等的实际经验与预期发生不利偏离，导致保险公司遭受非预期损失的风险。经营非寿险业务的保险公司所面临的保险风险，包括保费风险、准备金风险以及巨灾风险三个方面。保费风险，是指由于保险事故发生的频度及损失金额存在不确定性，导致保费可能不足以支付未来的赔款及费用，从而使保险公司遭受非预期损失的风险。

准备金风险，是指由于已发生未决案件在未来的赔付金额及时间存在不确定性，导致赔付可能超过准备金金额，从而使保险公司遭受非预期损失的风险<sup>②</sup>。对于经营非寿险业务的保险公司而言，准备金常常是资产负债表中最大的负债，因此准备金风险是保险风险的重要组成部分，对准备金风险的度量模型与方法进行研究至关重要。国外学者在这方面已经做了很多工作，如提出利用赔付进展结果定义非寿险准备金风险、采用 Bootstrap 方法模拟赔付进展结果的预测分布等，标志性的成果可以参阅 Merz 和 Wüthrich (2008)，Bühlmann 等 (2008)，Dahms, Merz 和 Wüthrich (2008)，Merz 和 Wüthrich (2013) 等。

在国内精算学界，系统介绍非寿险准备金风险度量模型与方法的研究较少。作为准备金风险方面的深入研究，本文作者在导师的悉心指导下，借鉴国外研究的优秀成果，采用前沿统计模型与方法，对与准备金风险度量相关的四个主题（基于贝叶斯对数正态模型的非寿险一年期准备金风险度量、残差相关条件下的准备金风险度量、赔款数据相关条件下

---

<sup>①</sup>中国保险监督管理委员会《保险公司偿付能力监管规则（1-17号）》（保监发[2015]22号）。

<sup>②</sup>关于保险风险、保费风险以及准备金风险的定义，均参考自中国保险监督管理委员会《保险公司偿付能力监管规则（4号）》

的准备金风险度量以及考虑模型不确定时的准备金风险度量)作了深入研究,并进行了详实的实证分析。这些前期积累为本博士论文的写作打下了坚实的基础。

### 1.1.2 研究意义

本论文面向国内外保险监管体系改革的热点问题,结合已有的非寿险准备金评估模型与方法,系统开展了非寿险准备金度量模型与方法的研究工作,研究意义可以概括为以下几个方面:

第一,以风险为导向的保险监管体系要求对保险公司所面临的风险进行全面、细致的度量。准备金风险作为保险风险的重要组成部分,其准确度量对于增强保险公司偿付能力,提高风险管理水平具有重要意义。国内外保险监管机构和保险公司越来越重视准备金风险的度量工作,本论文开展的一系列工作,有望为监管机构和保险公司两方面主体提供理论支持和实践参考。

第二,以往的研究关注随机性准备金评估模型下,如何获得准备金估计的置信区间或未决赔款的预测分布,较少涉及准备金风险度量问题。本文在已有的研究成果上,系统地从准备金风险的定义、模型、方法三个层面进行深入研究,这些研究进一步拓展了非寿险准备金评估的研究领域。

第三,本文的四个研究主题(基于贝叶斯对数正态模型的一年期准备金风险度量研究、残差相关条件下的非寿险准备金风险度量研究、赔款数据相关条件下的非寿险准备金风险度量研究、模型不确定性对准备金风险的影响研究)在国内外的研究领域尚属空白,希望通过这四个主题的研究丰富准备金风险度量模型与方法的研究成果。

第四,本文实证研究涉及大量的数值运算,为此作者采用了最为流行的 R 软件进行编程。得益于 R 软件的免费、开源和分享特点,不论多么复杂的模型或方法均可以在 R 软件中成功实现。另外,考虑到学术交流的需要,本文实证研究所涉及的程序与数据均在开源社区 Github 上共享。不论是实务中对准备金风险感兴趣的精算师,还是学界关注准备金风险的研究人员,都可以利用这些程序快速实现本文的模型和方法,从而避免了“重复制造轮子”的窘境。

## 1.2 国内外研究现状

### 1.2.1 文献综述

#### (1) 非寿险准备金评估模型与方法的最新研究进展

关于非寿险准备金的评估模型与方法,国内外学者的研究可谓汗牛充栋,主要的研究

思路是构造不同的准备金评估模型，然后推导准备金估计的预测均方误差，或者采用 Bootstrap 方法、马尔科夫链蒙特卡罗模拟方法得到未决赔款的预测分布。这方面的代表性论文可以参见 Mack (1993), England 和 Verrall (1999,2002,2007) 等。其中, Mack (1993) 提出了随机准备金评估的 Mack 模型, 并得到准备金估计的预测均方误差; England 和 Verrall (1999) 率先将 Bootstrap 方法应用于准备金评估的广义线性模型, 得到了准备金估计的预测均方误差的数值解; England 和 Verrall (2002) 对非寿险准备金评估的随机模型进行了系统综述; England 和 Verrall (2007) 在贝叶斯分析框架下, 利用马尔科夫链蒙特卡罗模拟方法在多种分布假设下得到了未决赔款的预测分布。

国内保险精算的学者也紧随其后, 对相关问题进行了讨论, 并发表了一系列研究成果, 如卢志义和刘乐平 (2007, 2008, 2010), 卢志义 (2008), 孟生旺 (2009), 张连增和段白鸽 (2011, 2012, 2013) 等, 这方面一篇很好的文献评述可以参见段白鸽 (2013)。近两年来, 学者们在准备金评估方面的研究越来越精细。如闫春和张良玉 (2014) 在广义线性模型框架下, 研究了准备金评估模型中事故年参数、进展年参数、日历年参数的平滑问题, 他们发现利用平滑方法可以减少模型中参数的个数, 使得参数估计更加平稳; 段白鸽和张连增 (2014) 关注赔款流量三角形中的异常值问题, 指出准备金评估的链梯法易受异常值影响, 为此设计了一种稳健链梯法, 识别并调整流量三角形中的异常值, 提高非寿险准备金估计的精确性; 卢志义等 (2015) 分析了传统链梯法的不足, 以偏差函数作为目标函数, 利用二次规划和目标规划模型估计进展因子, 并引入权重因子, 弱化异常数据对进展因子的影响。

## (2) 非寿险一年期准备金风险度量方法的研究进展

虽然关于准备金评估模型与方法的研究很多, 但对准备金风险, 尤其是一年期准备金风险的研究才刚刚起步, 参考文献相对较少。Merz 和 Wüthrich (2007) 提出了赔付进展结果 (CDR) 这一概念, 用来刻画一年期准备金风险, 并用 CDR 的预测均方误差对一年期准备金风险进行度量; 在准备金评估的 Mack 模型下, Merz 和 Wüthrich (2008) 得到了 CDR 的预测均方误差; Ohlsson 和 Laussenings (2009) 提出了 CDR 的随机模拟方法, 用以在更一般的假设条件下, 获得 CDR 的预测分布, 进一步由此预测分布得到一年期准备金风险的各种度量值; Happ 等 (2012) 同时考虑了已赔付和已发生赔款流量三角形数据, 在 PIC (Paid-incurred Chain) 模型基础上定义了 CDR, 并求得 CDR 的预测均方误差的解析解。

国内文献对一年期准备金风险的研究有所涉及, 如张连增和刘怡 (2013) 对 Solvency II

框架下的技术准备金估计进行了讨论，刘乐平等（2013）总结 SolvencyII 框架下准备金的定义，基于 Bootstrap 方法提出一种简便可行的模拟算法，获得了 CDR 的预测分布；高娟和沈立（2015）利用类似的方法，基于大型中资、中型中资和外资三类财险公司的数据，对比分析了不同类型公司非寿险准备金风险的差异；刘乐平等（2015）研究了残差相关条件下的非寿险准备金风险度量方法，他们基于多重假设检验理论和错误发现率控制过程，对残差三角形的相关性进行识别和检验，提出两阶段分区域 Bootstrap 方法，模拟获得未决赔款的预测分布，分析残差相关性对准备金风险波动的影响。

### （3）Bootstrap 方法在非寿险准备金风险分析中应用进展

由于非寿险公司赔付流量三角形数据的数量有限，而影响未来赔付的不确定性因素众多，所以 Bootstrap 方法在准备金评估和风险分析中具有举足轻重的作用。Ashe（1986）首先将 Bootstrap 方法应用到准备金估计方差的模拟计算中，并将结果与 Jackknife 方法进行了比较。此后，Bootstrap 方法在非寿险准备金风险分析中得到了普遍的关注。Taylor（1987），Verrall（1996），England 和 Verrall（1999）等将 Bootstrap 方法应用于准备金估计的预测均方误差（MSEP: Mean Square Error of Prediction）计算中；由于 MSEP 只描述了未决赔款波动的一阶矩和二阶矩，而预测分布比 MSEP 包含了更为丰富的信息，可以更充分地刻画未决赔款的不确定性从而有效地度量风险，所以，England 和 Verrall（2006），Wüthrich 和 Merz（2008），Robert（2013）等将 Bootstrap 方法推广到了未决赔款预测分布的模拟中。

近年来，国内学者也关注 Bootstrap 方法在准备金评估中的应用，如张连增和段白鸽（2011）在 Munich 链梯法基础上，结合模型假设，提出了两种基于 Bootstrap 方法的随机性 Munich 链梯法，并通过数值实例和 R 软件进行了实证分析。需要指出的是，张连增和段白鸽两位学者在将 Bootstrap 方法应用到非寿险准备金评估的研究中作出了大量的工作<sup>①</sup>，本文作者从他们的工作中获益匪浅。这些文献不仅拓展了非寿险精算与风险管理领域的理论研究成果，而且为保险公司精算实务人员具体分析实际赔付数据和管控准备金风险提供了重要的理论依据和可行的实施办法。然而，随着 Bootstrap 方法在准备金评估中的应用越来越广泛，使用 Bootstrap 方法的重要条件——重抽样样本必须满足独立性假设（Efron and Tibshirani,1994）在现有精算文献中几乎被忽略。在已有的文献里，常常默认该条件是

---

<sup>①</sup>张连增,段白鸽. 基于 Bootstrap 方法的随机性准备金进展法及 R 实现[J]. 山西财经大学学报,2011,04:18-24; 张连增,段白鸽.准备金评估的随机性 Munich 链梯法及其改进——基于 Bootstrap 方法的实证分析[J]. 数量经济技术经济研究,2011,11: 98-111; 张连增,段白鸽. 未决赔款准备金评估的对数正态模型及其预测分布的 Bootstrap 实现[J]. 数学的实践与认识,2011,41:33-43; 张连增,段白鸽. 基于非参数 Bootstrap 方法的随机性链梯法及 R 实现[J]. 统计与决策,2012,21:17-23.

成立的，并没有对其进行识别和检验。显然，如果拟合模型得到的残差三角形不满足独立性假设，而是具有一定的相关结构，不对其进行检验而贸然使用 Bootstrap 方法，得到的结论就必然存在偏差，准备金风险的度量自然就不可能准确。

#### (4) 赔款数据相关条件下非寿险准备金评估的研究进展

不少研究文献均在放松独立性假设基础上，通过建模来处理赔付数据的相关性。Kremer (2005) 研究了广义线性模型独立性假设的局限性，提出利用一阶自回归过程描述不同进展年赔付数据的相关性；De Jong (2006) 考察了赔付流量三角形中可能存在的三种相关性：进展年相关性、事故年相关性和会计年相关性，他建立了时间序列模型并采用卡尔曼滤波方法对参数进行极大似然估计；De Alba 和 Nieto-Barajas (2008) 设计了考虑进展年相关性的贝叶斯准备金评估模型，并与其它标准方法进行了比较，发现前者的预测结果与经典的链梯法接近，并能给出准备金风险的全部度量值；Zhang 等 (2012) 研究了不同公司同种业务的准备金估计问题，发现分层贝叶斯模型可以很好地描述多个赔付流量三角形之间的相关关系。目前，分层贝叶斯模型已经成为描述赔付三角形内部、多个赔付三角形之间相关性的较佳选择 (段白鸽和张连增, 2013)。

#### (5) 模型不确定性对非寿险准备金风险的影响的研究进展

Cairns (2000) 把精算模型中的不确定性分为三类，分别是过程风险、参数风险和模型风险，并指出在贝叶斯分析框架下，可以将这三类风险有机结合起来。Cairns 认为，精算中的样本数据量常常较少，因此考虑模型风险时必要的，但模型风险是否会对最后的分析结果造成大的影响并没有定论，具体问题需要具体分析。Ntzoufras 等 (2005) 研究了索赔数据的建模问题，他们分别利用泊松分布模型、负二项分布模型和广义泊松模型对同一索赔数据建模，发现除泊松模型外，其余两种模型对数据的拟合都比较好，差距并不悬殊，这表明模型不确定性确实存在。Verrall 和 Wüthrich (2012) 研究了非寿险准备金评估中尾部曲线的选择问题，共构建了 21 种不同的模型，然后利用逆跳马尔科夫链蒙特卡罗方法 (RJMCMC: Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo) 进行模型选择，发现其中有 6 个模型的后验概率较高。他们提出利用后验概率对这六个模型的准备金估计结果进行加权作为最后的准备金估计结果，以此考虑模型不确定性对非寿险准备金估计带来的影响。

## 1.3 本文内容结构

### 1.3.1 研究的基本思路

本文主要利用统计模型与方法对准备金风险进行度量。从统计角度来看，有以下三个

方面因素需要考虑：

(1) 时间。时间划定了准备金风险度量的范围。按照定义，准备金风险是指已发生案件在未来赔付金额及时间存在不确定性，从而使保险公司遭受非预期损失的风险。因此，准备金风险按照时间由长到短可以分为三类。第一，终年期准备金风险 (ultimate reserve risk)。终年期准备金风险强调未决赔款在整个业务生命周期内的波动性，并希望对其进行有效控制。第二，多年期准备金风险 (multi-year reserve risk)。多年期准备金风险关注未决赔款在未来若干年份内的波动性，一般来说其值小于终期准备金风险。第三，一年期准备金风险。对于非寿险公司而言，一年期准备金风险首当其冲，是公司必须重点监控的一种风险。这是因为，一旦在未来一个年度内发生非预期的大额赔付，可能会使整个业务周期内看上去高枕无忧的风险管理安排变得不堪一击。

(2) 数据。数据是准备金风险度量的基础。一般来说，我们关注数据的以下几个方面。第一，数据是否全面。在准备金风险度量过程中，可利用的数据类型多种多样，包括险种的赔款数据、险种的赔付次数数据以及相关险种的赔款数据和赔付次数数据等。数据越全面，准备金风险度量结果就越客观准确。因此，在进行分析之前，应尽可能多地收集相关数据。第二，数据是否可靠。数据是否可靠即是关心数据质量，数据质量是影响准备金风险度量的重要因素。在精算实务中，财务人员在整理赔款数据时，可能存在小数点输错位导致的记录错误。这种异常数据会导致错误的风险度量值。第三，数据是否相关。保险数据常常具有相关性，例如赔款流量三角形内相邻事故年、进展年的数据具有相关性，赔款流量三角形与赔付次数流量三角形具有相关性，相近险种赔款及赔付次数数据具有相关性等。

(3) 模型。模型是准备金风险度量的工具。应用统计模型与方法对准备金风险进行度量时，应注意以下两个方面。第一，模型检验。已有的研究较多关注构建精算统计模型，却疏于对模型进行检验。事实上，模型仅是现实世界的近似，我们无法保证真实保险数据一定满足模型假设。因此，在模型拟合之后，应利用一系列的模型检验方法，比如残差分析技术，对模型假设的合理性进行检验，以保证最终准备金风险度量值可靠可信。第二，模型选择的不确定性。一般，针对同一数据样本，通常可构建一组模型进行分析，然后根据模型评价准则挑选最优模型。但在某些情况下，依据模型评价准则可能会得到多个模型对数据拟合均比较好的结论，这被称为模型选择的不确定性。因此，在利用模型进行分析时，应考虑模型不确定性对准备金风险的影响。

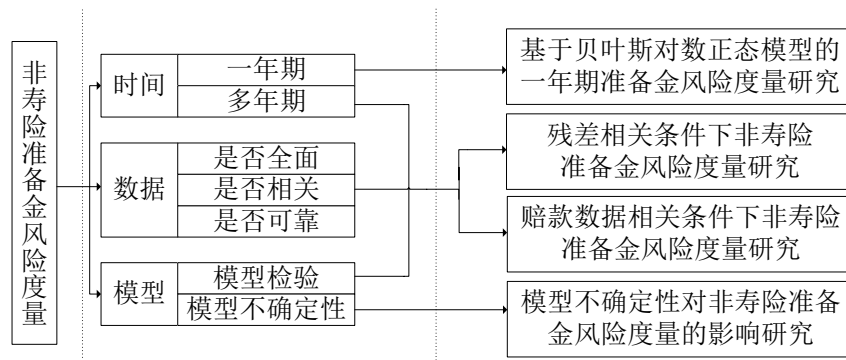


图 1.1 论文思路框架

当然，本文无法兼顾以上所有情形下的准备金风险度量问题。然而，以上若干个因素的典型组合构成了本文的主要研究内容，如上图所示。具体而言，本文重点解决四个问题：

(1) 非寿险一年期准备金风险度量；(2) 残差相关条件下的非寿险准备金风险度量；(3) 赔款数据相关条件下非寿险准备金风险度量；(4) 考虑模型不确定性对非寿险准备金风险的影响。遵循这四个问题，研究思路如下：

#### (1) 非寿险一年期准备金风险度量

近年来，出现了大量关于非寿险未决赔款不确定性度量的研究文献和专著，这些研究对保险公司提留准备金、度量准备金风险和偿付能力建设具有重要意义。但也应注意到，欧盟保险偿付能力监管标准 II（简称为 Solvency II）对准备金风险度量提出了新的要求，规定度量的时间跨度为一年，也就是所谓的“一年期准备金风险”。然而，国内学者在一年期准备金风险度量上的研究略显薄弱。很多研究限于定性描述。本研究拟从非寿险一年期准备金风险的概念、度量工具和度量方法三个方面进行讨论，通过一个直观实例阐述非寿险准备金一年期准备金风险的含义，引出非寿险一年期准备金风险的刻画工具：赔付进展结果，最后探讨贝叶斯对数正态模型下获得赔付进展结果预测分布的方法。

#### (2) 残差相关条件下非寿险准备金风险的度量

由于非寿险公司赔付流量三角形数据的数量有限，而且影响未来赔付的不确定性因素众多，所以 Bootstrap 方法在准备金评估和风险分析中具有举足轻重的作用。然而，随着 Bootstrap 方法在准备金评估中的应用越来越广泛，使用 Bootstrap 方法的重要条件—重抽样样本必须满足独立性假设 (Efron and Tibshirani, 1994) 在现有精算文献中几乎被忽略。为了避免由于残差相关性引发的准备金风险度量偏误问题，并且更加充分地反映影响准备金风险的横向（事故年）因素和纵向（进展年）因素，本文拟基于多重假设检验理论与错误发现率 (FDR: False Discovery Rate) 控制过程，给出检验和解决残差三角形相关性问题的方法，对残差相关性引起的准备金风险波动进行分析。



### (3) 赔款数据相关条件下非寿险准备金风险的度量

泊松模型是比较流行的准备金评估模型，该模型不仅能够得到与经典链梯法相一致的准备金估计结果，而且与贝叶斯方法、Bootstrap 方法结合还可以得到未决赔款的预测分布，从而实现对准备金评估的不确定性，也就是准备金风险的度量。然而，泊松模型及其扩展——过离散泊松模型，都假设不同事故年、进展年的增量赔款数据是相互独立的。在独立性假设下，参数估计和准备金估计较为容易。但问题是，赔款数据是否满足独立性假设呢？已有的研究注重模型的构建与估计，却疏于对模型假设进行检验，从而在一定程度上忽视了赔款数据相关性问题。如果赔款数据相关却仍然假设其独立，那么得到的参数估计将会有偏的，而估计误差的度量也不精确。因此，如何检验增量赔款数据的独立性假设，以及当假设不成立时，如何对独立泊松模型进行改进等问题就自然进入我们的研究视野。本文拟从模型假设、检验和改进三个方面，对赔款数据相关情形下的非寿险准备金风险度量模型与方法进行研究。

### (4) 模型不确定性对非寿险准备金风险的影响

从模型内部角度看，准备金风险来自两个方面：参数风险和过程风险。在考虑以上两种风险时，首先假定选取的模型是正确的。而事实上，我们无法保证构建的模型准确无误，也就是说模型也可能设定有误，这就是模型不确定性（或称模型风险）。在统计领域，关于模型不确定性的研究较为成熟，一篇较完整的文献综述可参阅 Hoeting 等（1999）。但是，在非寿险精算领域研究模型不确定性，尤其是考虑模型不确定性对非寿险准备金风险产生的影响，这方面的研究文献还比较少。本文拟以形式相近的两类非线性增长曲线模型为例，研究这两类模型的不确定性，并采用贝叶斯模型平均方法将两类模型的预测结果进行加权平均，最终将模型不确定性融入到非寿险准备金风险的度量中来。

本文重点研究非寿险准备金风险度量的模型与方法，研究理论基础涵盖了精算学、统计学、会计学等学科。本文采用理论分析与实证研究相结合的方法，在理论分析中融合统计研究范式，如数据可视化、假设检验、模型诊断等；在实证研究中结合统计分析方法，如极大似然估计、贝叶斯 MCMC 方法、Bootstrap 方法等。

## 1.3.2 主要内容和结构安排

本文共分六章内容。第一章为引言；第二、三、四和五章围绕非寿险准备金风险度量这一主题从四个方面（基于贝叶斯对数正态模型的非寿险一年期准备金风险度量、残差相关条件下非寿险准备金风险度量、赔款数据相关条件下非寿险准备金风险度量以及模型不

确定性对非寿险准备金风险度量的影响) 展开讨论; 第六章是本文的总结和展望。

第一章为引言。主要介绍本文的选题背景和研究意义, 梳理国内外的研究现状, 提出本文的研究内容和研究思路, 最后对本文的创新点进行总结。

第二章讨论 Solvency II 框架下非寿险一年期准备金的度量问题。本章通过一个直观实例阐释一年期准备金的含义, 引出一年期准备金的描述工具: 赔付进展结果, 然后指出可以通过 CDR 预测分布的统计特征值, 如标准差、分位数等, 来度量一年期准备金风险。作为具体分析, 本章基于贝叶斯对数正态模型, 利用随机模拟方法获得赔付进展结果的预测分布, 然后通过预测分布的统计特征值对一年期准备金风险进行度量。最后, 本章考察一年期准备金风险与传统准备金评估的区别, 并借助 CDR 预测分布和未决赔款的统计特征值进行了说明。

第三章研究残差相关条件下的非寿险准备金风险度量与控制问题。为避免由残差相关性引发的准备金风险度量偏误问题, 更加充分地反映影响准备金风险的横向(事故年) 因素和纵向(进展年) 因素, 本章基于多重假设检验理论与错误发现率(FDR: False Discovery Rate) 控制过程, 给出检验和解决残差三角形相关性问题的方法。具体地, 基于超散布泊松分布(ODP: Over-dispersed Poisson) 模型, 通过多重假设检验与 FDR 控制过程识别和检验残差三角形是否满足独立性假设, 然后采用两阶段分区域 Bootstrap 方法, 对残差相关性引起的准备金风险波动进行分析。

第四章研究赔款相关条件下非寿险准备金风险的度量问题。本章在一家保险公司真实赔款数据基础上拟合过离散泊松模型, 通过对模型拟合残差进行探索性数据分析, 发现不同事故年、进展年的残差并不相互独立, 以此验证增量赔款数据具有相关性, 尤其是相邻事故年、进展年的增量赔款具有正相关性。接着, 本章对过离散泊松模型进行改进, 构建描述赔款数据相关性的条件自回归泊松模型。最后, 本章采用贝叶斯方法, 结合先验信息对条件自回归泊松模型进行估计, 特别是利用 MCMC 方法对未决赔款后验分布进行随机模拟, 最终得到赔款数据相关条件下的非寿险准备金估计和风险度量值。

第五章讨论模型不确定性对非寿险准备金风险的影响。精算领域中讨论模型不确定性的文献较少, 所以本章首先介绍索赔频数和准备金评估建模中模型不确定性的两个例子。然后在段白鸽(2013) 研究的基础上, 研究两种不同准备金评估模型(Loglogistic 增长曲线模型和 Weibull 增长曲线模型) 的准备金估计和风险度量问题, 并创新性地提出利用贝叶斯模型平均方法对两个模型的结果进行加权平均, 最后不仅得到了综合两个模型的准备金估计值, 而且还得出考虑模型不确定性后的准备金风险度量值。

第六章是总结与展望。对本文的主要结论和不足之处进行总结，并展望未来的研究方向。

最后是本文的参考文献和附录。

### 1.3.3 论文主要创新点

本文的主要改进和创新可归结为以下两个方面：

第一，研究方法的创新。在贝叶斯对数正态模型基础上，提出了度量非寿险一年期准备金风险的随机模拟算法；利用多重假设检验理论和错误发现率控制过程识别、控制具有相关性的残差，发展了两阶段分区域 **Bootstrap** 方法；基于赔款数据的相关结构，对传统独立泊松模型进行改进，设计了体现赔款数据相关性的贝叶斯条件自回归泊松模型；采用贝叶斯模型平均理论研究非线性增长曲线模型的不确定性，考虑模型不确定性对非寿险准备金风险的影响。

第二，研究形式的创新。本文实证研究涉及的数值运算是均在 **R** 软件中实现。秉持 **R** 软件的开放和共享特点，作者把实证研究中的数据和程序在开源 **Github** 社区分享，这方便了对本文主题感兴趣的学友。读者可从 **Github** 上下载这些数据和程序，然后在本机运行程序就能得到与本文一致的结果。此外，将本文数据替换为新数据，还能得到不同数据情况下非寿险准备金风险的度量结果。

## 第 2 章 基于贝叶斯对数正态模型的非寿险一年

### 期准备金风险度量研究

以风险为导向的 Solvency II 监管框架，对非寿险准备金评估的理论、模型和方法提出了新的要求，准备金评估在主要关注最优估计（Best Estimate）的基础上，新增了风险边际（Risk Margin）的内容。为了提高准备金风险度量与控制的精度和有效性，Solvency II 监管框架对准备金风险度量的时间范围进行了特别的调整，时间跨度从以往的终期（Ultimate：从评估时刻直到所有赔案结清为止）限制为一年，即“一年期准备金风险”（One-year Non-life Reserving Risk）。在此背景下，传统的准备金评估就转换成对一年期准备金的风险进行管理。所以，一年期准备金风险的识别、度量与监控就成为目前 Solvency II 监管框架下非寿险公司重点关注的核心问题。

#### 2.1 非寿险一年期准备金风险

目前为止，虽然中文文献中多次提及非寿险准备金风险，但是准备金风险，尤其是一年期准备金风险的概念依然有些模糊。接下来，我们从直观实例、刻画工具和度量方法几个角度对一年期准备金风险作系统阐述。

##### 2.1.1 一年期准备金风险的直观示例

Solvency II 监管框架规定，度量非寿险准备金风险的时间跨度为一年，故称为“一年期准备金风险”，为了更深刻地理解其内涵，我们通过一个例子（基于 Ira Robbin, 2012）来进行说明。

表 2.1 所示为一非寿险公司年初、年末的准备金的提取情况。在年初，采用合适的准备金评估模型与估计方法  $M$  得到了未决赔款准备金的估计值（列（1））；假设未来一年内可能发生 A、B、C 和 D 四种情景（列（2））；哪一种情景发生是不确定的，但每种情景发生的概率是已知的，假设均为 25%（列（3））；对应每一种情景下，该年度内发生了增量赔款（列（4））；到了年末，依然采用与年初同样的准备金评估模型与估计方法  $M$ ，得到年末未决赔款准备金的估计值（列（5））；将当年增量赔款（列（4））与年末未决赔款准备金（列（5））加总，可得到未决赔款的回溯估计（列（6））。

理想情况下，未决赔款的回溯估计（列（6））应该与年初未决赔款准备金估计（列（1））一致，这意味着，年初提取的准备金合理且充足。然而，由于当年增量赔款在四种不同情景下的不确定性，未决赔款的回溯估计会围绕年初未决赔款准备金估计上下波动。以 C 情

景为例，准备金初始估计比回溯估计小（差值为 5 千元），这说明年初提取的准备金不足，不能满足当年赔付和年末提取准备金的需要，在年末需额外筹集资本 5 千元来填补缺口，从而给公司经营带来风险，当资金缺口巨大时，甚至有可能致使公司破产。这就是一年期准备金评估不足给保险公司带来的风险，即一年期准备金风险。将未决赔款准备金（年初）（列（1））的值减去未决赔款的回溯估计（列（6）），可得年初估计与回溯估计之差（列（7）），这个差值可以看作是随机变量，其概率分布为列（3），这个随机变量的波动程度即显示了一年期准备金风险的大小。

表 2.1 一年期准备金风险

单位：千元

未决赔款准备 金（年初）	当年增量赔款			未决赔款准备 金（年末）	未决赔款回溯 估计	年初估计与回溯估 计差距
	情景	概率	赔款			
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
¥100	A	25%	5	70	75	25
¥100	B	25%	15	80	95	5
¥100	C	25%	20	85	105	-5
¥100	D	25%	30	95	125	-25

从这个例子可以看出，对非寿险公司而言，一年期准备金风险首当其冲，是公司必须重点监控的一种风险。以往研究主要强调未决赔款在整个业务生命周期中的波动性，并希望对其进行有效控制，但从这个例子我们看到，一旦在未来一个年度内有些风吹草动，比如发生意料不到的巨额赔付，就会使在整个业务周期内，看上去高枕无忧的风险管理安排变得不堪一击。

### 2.1.2 一年期准备金风险的描述工具：赔付进展结果

在上一小节的例子中，年初估计和回溯估计的差距（表 2.1 中的列（7））就是赔付进展结果——CDR。那么，在赔款流量三角形中如何定义 CDR 呢？

图 2.1 (a) 为一般意义上的增量赔款上流量三角形  $D_t$ ，共有  $I+1$  个事故年， $J+1$  个进展年。首先，根据赔付历史数据  $D_t$ ，采用合适的评估模型与估计方法  $M$  得到未决赔款准备金年初的初始估计  $R^0$ 。然后将时间往后推移一年，把这一年度内发生的增量赔款加入到原来的流量三角形中，构成新的流量三角形  $D_{t+1}$ （图 2.1 (b)）。接下来，根据更新后的赔付信息  $D_{t+1}$ ，仍然采用与年初相同的准备金评估模型与估计方法  $M$  得到年末未决赔款准

备金的估计  $R^1$ 。

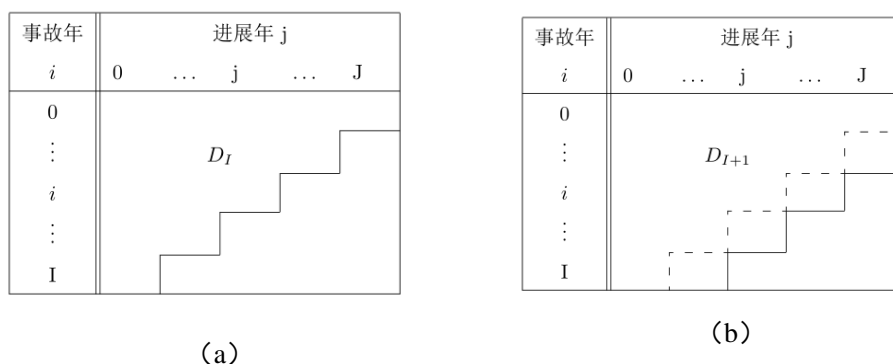


图 2.1 在 I 时刻和 I+1 时刻的赔款流量三角形

$R^0$  代表图 2.1 (a) 下流量三角形未决赔款准备金估计，而  $R^1$  代表图 2.1 (b) 中较小的下流量三角形未决赔款准备金估计，所以  $R^0$  应该大于  $R^1$ 。然而，如果记这一年度内增量赔款之和为  $C'$ ， $C' + R^1$  就是上节例子中的回溯估计，将回溯估计  $C' + R^1$  与初始估计  $R^0$  进行比较，直观上看二者应该相差不大，因为  $C' + R^1$  对应图 2.1 (b) 虚线右下侧的三角形，这与图 2.1 (a) 右下侧三角形（对应  $R^0$ ）是吻合的。将  $R^0$ 、 $C'$  和  $R^1$  绘制在图 2.2 中，如前述讨论， $C' + R^1$  与  $R^0$  相差无几，这意味着图 2.2 左侧和右侧高度应该基本相同。

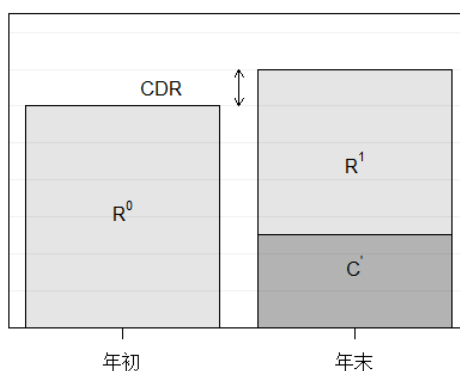


图 2.2 赔付进展结果

然而，事实并非如此。由于这一年度内发生的赔款  $C'$  具有不确定性，所以  $R^0$  与  $C' + R^1$  往往有一定差距，图 2.2 左侧和右侧高度也并不相同：若左侧高于右侧，表示非寿险公司提留准备金充足，一年以后还有剩余；若左侧低于右侧，表示公司提留准备金不足，在 I+1 时刻需要筹集额外资金来填补缺口，给公司经营带来风险。

$R^0$  与  $C' + R^1$  的差距恰好可以用来描述一年期准备金风险。De Felice 和 Morconi (2006) 最早提出了这个观点，并把这种差距称为“年末义务” (Year-end Obligations)，Merz

和 Wüthrich (2007) 则用赔付进展结果来定义这个差距, Ohlsson 和 Laussenings (2009) 把它称为“一年流量结果”(One-year Run-off Result), 而最近的 Robert (2013) 把它称为“一年恶化”(One-year Deterioration)。

本文采用 CDR (赔付进展结果) 来刻画一年期准备金风险, 其形式如下:

$$CDR = R^0 - C' - R^1 \quad (2.1)$$

其中,  $R^0$  是确定的,  $C'$  是随机的, 并且  $R^1$  也会随着  $C'$  的随机变化而发生波动, 所以 CDR 是随机变量。

有了 CDR 这个概念, 就可以解决如何描述一年期准备金风险问题。CDR 是随机变量, 其波动程度的大小与风险密切相关, 因此, 对一年期准备金风险的刻画就转变为对随机变量赔付进展结果 (CDR) 波动性的度量进行研究。

### 2.1.3 CDR 的预测分布

CDR 波动性的度量国外文献主要有两种思路: 一是解析推导其预测均方误差 (MSEP), 另一是随机模拟获得其预测分布。关于解析推导 CDR 的预测均方误差的已有不少研究, 如 Merz 和 Wüthrich (2008), Bühlmann 等 (2008), Dahms, Merz 和 Wüthrich (2008), Merz 和 Wüthrich (2013) 等, 其关注点是预测均方误差精确解析解, 但是, 预测均方误差只考虑 CDR 的一阶矩和二阶矩, 而且其解析解有时很难得到。因此, 为更方便地研究 CDR 的波动性, 可以构造随机模型, 采用随机模拟方法获得 CDR 的预测分布, 进而通过分布的统计特征值, 如标准差, 分位数等, 来描述一年期准备金的风险。

Ohlsson 和 Laussenings (2008) 给出了随机模拟的一般步骤, 该步骤与 CDR 的定义一致。首先根据流量三角形估计年初准备金  $R^0$ , 然后随机模拟未来一年内的赔款, 并将这一年内发生的增量赔款之和记为  $[C']^{(k)}$  ( $k$  表示进行第  $k$  次模拟)。接下来, 将模拟得到的赔款加入到原来的三角形中, 构成新的流量三角形。根据新的流量三角形, 估计年末准备金  $[R^1]^{(k)}$ 。最后, 依据式 (2.1) 得第  $k$  次模拟值  $CDR^{(k)}$ :

$$CDR^{(k)} = R^0 - [C']^{(k)} - [R^1]^{(k)} \quad (2.2)$$

上述过程循环多次, 可以得到 CDR 的预测分布。

不妨做一个比喻, 如果将流量三角形比作一个方形的“盒子”, 那么, 模拟赔款就像是打开“盒子”并添加一条新对角线, 再次估计准备金  $[R^1]^{(k)}$  就像是把“盒子”扣上, 上述随

机模拟过程就像是在不停地打开扣上盒子。按照这样的比喻， $R^0$  被称为“开启准备金”（Opening Reserve）， $R^1$  被称为“关闭准备金”（Closing Reserve），精算人员也被戏称为“盒子中的精算师”（Actuary-in-Box），而由于进行了两次准备金评估，该随机模拟方法又被叫做 Re-reserving 方法（Diers, 2008）。

采用随机模拟方法获得 CDR 预测分布，与解析推导预测均方误差相比，具有以下明显优势：（1）几乎适用于任何随机性准备金评估模型，对模型假设依赖度减少；（2）随机模拟方法得到的预测分布提供了除 MSE 外更加丰富的信息，如 VaR 等，从而可以更加全面刻画一年期的准备金风险；（3）可以融入曲线拟合技术和外推法，从而将尾部因子估计纳入准备金风险度量中；（4）不仅适用于一年期准备金风险的度量，而且可用来讨论多年期准备金风险（Multi-year Reserving Risk）的度量。

## 2.2 一年期准备金风险度量：基于贝叶斯对数正态

### 模型和 CDR 的预测分布

由于流量三角形的保险数据有限，基于 MCMC 随机模拟的贝叶斯统计模型已被国内外很多精算学者广泛采用，如 De Alba（2002）、Ntzoufras 和 Dellaportas（2002）、Peters 等（2009）、Happ 等（2012）、Wüthrich（2013）；刘乐平等（2006）、段白鸽（2014）。下面首先设定准备金评估的贝叶斯对数正态模型，并对相关参数进行贝叶斯后验推断，然后给出 CDR 预测分布随机模拟的具体步骤，进而通过预测分布的统计特征值对一年期准备金风险进行度量。

#### 2.2.1 贝叶斯对数正态模型设定

将事故年记作  $i \in \{0, 1, \dots, I\}$ ，进展年记作  $j \in \{0, 1, \dots, J\}$ ， $P_{i,j}$  表示  $i$  事故年发生的保险事故到进展年  $j$  为止的累计赔款。不失一般性，假设  $I = J$ 。

$D_I = \{P_{i,j} : 0 \leq i + j \leq I; 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J\}$  表示累计赔款上流量三角形。

下面给出贝叶斯对数正态模型的假设：

（1）累计赔款进展因子对数化处理后服从正态分布：

$$\varepsilon_{i,j} = \log \left( \frac{P_{i,j}}{P_{i,j-1}} \right) \sim N(\Phi_j, \sigma_j^2), j \in \{0, 1, \dots, J\} \quad (2.3)$$

其中， $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_J$  是均值参数， $\sigma_0^2, \sigma_1^2, \dots, \sigma_J^2$  是先验方差参数。另外，对于所有事故



年  $i \in \{0, 1, \dots, I\}$ , 定义  $P_{i,-1} = 1$ 。如果定义  $\Xi_i = (\varepsilon_{i,0}, \varepsilon_{i,1}, \dots, \varepsilon_{i,J})'$ , 则 (2.3) 式的向量形式为:

$$\Xi_i \sim N(\Theta, V), i \in \{0, 1, \dots, I\}$$

这里,  $\Theta = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_J)'$ ,  $V$  是一个对角矩阵, 对角元素为  $\sigma_j^2$ 。

(2) 均值参数  $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_J$  相互独立, 各自的先验分布为:

$$\Phi_j \sim N(\phi_j, s_j^2), j \in \{0, 1, \dots, J\} \quad (2.4)$$

其中  $\phi_j$  和  $s_j^2$  是先验参数。在进行贝叶斯推断之前, 这些先验参数都要提前设定, 但如果研究者也没有更多的信息, 一般采用无信息先验较好。

为方便对均值向量  $\Theta = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_J)'$  进行贝叶斯后验推断, 我们对数据进行转化。考虑到累计赔款数据服从对数正态分布, 所以首先将其对数化:

$$X_i = (\log P_{i,0}, \log P_{i,1}, \dots, \log P_{i,J})'$$

从而转变为更熟悉的正态分布:

$$X_i | \{\Theta\} = B \Xi_i | \{\Theta\} \sim N(\mu = B\Theta, \Sigma = BVB')$$

其中, 矩阵  $B \in \mathfrak{R}^{(J+1) \times (J+1)}$  由 (0、1、-1) 构成, 并满足  $X_i = B \Xi_i$ 。

准备金评估是根据已知赔付数据预测未决赔付数据, 因此将  $X_i$  分解为已知的、真实的赔付向量  $X_i^{(1)}(J)$  和未知的、有待预测的赔付向量  $X_i^{(2)}(J)$ :

$$X_i^{(1)}(J) = (\log P_{i,0}, \log P_{i,1}, \dots, \log P_{i,J-i})' \in \mathfrak{R}^{J-i+1},$$

$$X_i^{(2)}(J) = (\log P_{i,J-i+1}, \dots, \log P_{i,J-1}, \log P_{i,J})' \in \mathfrak{R}^i.$$

$X_i^{(1)}(J)$  和  $X_i^{(2)}(J)$  仍然服从正态分布, 为了得到它们的均值向量和协方差矩阵, 首先将矩阵  $B$  也分解为两块:

$$B = \begin{pmatrix} B_i^{(1)} \\ B_i^{(2)} \end{pmatrix} \quad B_i^{(1)} \in \mathfrak{R}^{(J-i+1) \times (J+1)} \quad B_i^{(2)} \in \mathfrak{R}^{i \times (J+1)}$$

那么,  $X_i^{(1)}(J)$  和  $X_i^{(2)}(J)$  的均值向量分别是:

$$\mu_i^{(1)}(J) = E[X_i^{(1)}(J) | \Theta] = B_i^{(1)} \Theta,$$

$$\mu_i^{(2)}(J) = E[X_i^{(2)}(J) | \Theta] = B_i^{(2)} \Theta.$$

$X_i^{(1)}(J)$  和  $X_i^{(2)}(J)$  的协方差矩阵没有如上式显然的结果，它们需要从  $X_i$  的协方差矩阵  $\Sigma$  中分离出来， $\Sigma$  的分块表示为：

$$\Sigma = BVB' = \begin{pmatrix} \Sigma_{11}^{(i)} & \Sigma_{12}^{(i)} \\ \Sigma_{21}^{(i)} & \Sigma_{22}^{(i)} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

这样， $\Sigma_{11}^{(i)}$  表示  $X_i^{(1)}(J)$  的协方差矩阵， $\Sigma_{22}^{(i)}$  表示  $X_i^{(2)}(J)$  的协方差矩阵。

通过以上形式转换我们把数据分成两组，分别是已知的、真实的对数赔付数据和未知的、有待预测的对数赔付数据，并分别考虑了它们的分布特征，这样就可以方便地对参数向量  $\Theta = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_J)'$  进行贝叶斯后验推断，并对最终赔款和未决赔款准备金进行估计。

### 2.2.2 参数后验估计、最终赔款估计以及准备金估计

在贝叶斯对数正态模型假设下，利用贝叶斯定理对参数  $\Theta$  进行后验推断。给定  $\Theta$ ，观测数据  $D_I$  的似然函数为

$$L_{D_I}(\Theta) \propto \prod_{i=0}^J \exp\left\{-\frac{1}{2}(X_i^{(1)}(J) - B_i^{(1)}\Theta)'(\Sigma_{11}^i)^{-1}(X_i^{(1)}(J) - B_i^{(1)}\Theta)\right\}$$

而由模型假设可知， $\Theta$  的先验分布是正态分布，其先验均值向量和先验协方差矩阵分别为

$$\nu = (\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_J)', T = \text{diag}(s_0^2, s_1^2, \dots, s_J^2)$$

因此，结合似然函数和先验分布，根据贝叶斯定理得  $\Theta$  的后验分布：

$$P(\Theta|D_I) \propto L_{D_I}(\Theta) \exp\left\{-\frac{1}{2}(\Theta - \nu)'T^{-1}(\Theta - \nu)\right\} \quad (2.6)$$

先验分布为正态分布，似然函数又是正态分布密度的乘积，满足共轭条件，所以  $\Theta$  的后验分布  $P(\Theta|D_I)$  也是正态分布，其后验协方差矩阵  $T(D_I)$  和后验均值向量  $\nu(D_I)$  分别为：

$$T(D_I) = (T^{-1} + \sum_{i=0}^J (B_i^{(1)})'(\Sigma_{11}^i)^{-1}B_i^{(1)})^{-1} \quad (2.7)$$

$$\nu(D_I) = T(D_I)[T^{-1}\nu + \sum_{i=0}^J (B_i^{(1)})'(\Sigma_{11}^i)^{-1}X_i^{(1)}(J)] \quad (2.8)$$

在贝叶斯对数正态模型假设下，推导各事故年最终赔款均值估计  $E[P_{i,J}|D_I]$  的流程较为清晰，可以分 2 步完成，如图 2.3 所示。

(1) 估计  $E[P_{i,J}|\Theta, D_I]$ 。根据多元正态分布的性质，在给定已知的对数赔付数据  $X_i^{(1)}(J)$  和  $\Theta$  的条件下，有待预测的对数赔付数据  $X_i^{(2)}(J)$  的条件分布仍为多元正态分布：

$$X_i^{(2)}(J) \Big|_{\Theta, D_I} \sim N(\tilde{\mu}_i^{(2)}(J), \tilde{\Sigma}_{22}^{(i)}), i \in \{0, 1, \dots, J\},$$

其中，均值向量和协方差矩阵分别为

$$\tilde{\mu}_i^{(2)}(J) = \mu_i^{(2)}(J) + \Sigma_{21}^{(i)}(\Sigma_{11}^{(i)})^{-1}(X_i^{(1)}(J) - \mu_i^{(1)}(J)),$$

$$\tilde{\Sigma}_{22}^{(i)} = \Sigma_{22}^{(i)} - \Sigma_{21}^{(i)}(\Sigma_{11}^{(i)})^{-1}\Sigma_{12}^{(i)}.$$

根据对数正态分布的性质，可得最终赔款的最优估计：

$$E[P_{i,J} | \Theta, D_I] = \exp\{e_i' \tilde{\mu}_i^{(2)}(J) + e_i' \tilde{\Sigma}_{22}^{(i)} e_i / 2\}, e_i = (0, \dots, 0, 1)' \in \mathfrak{R}^i$$

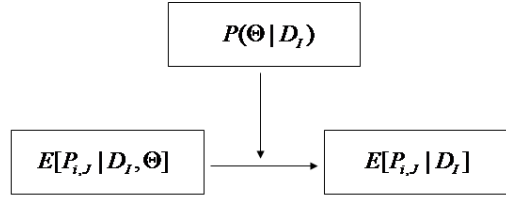


图2.3 最终赔款的计算流程

(2) 估计  $E[P_{i,J} | D_I]$ 。  $E[P_{i,J} | \Theta, D_I]$  表达式中的  $e_i' \tilde{\mu}_i^{(2)}(J)$  是  $\Theta$  的线性函数，所以  $E[P_{i,J} | \Theta, D_I]$  仍然依赖于均值向量  $\Theta$ 。依据全期望公式，结合  $\Theta$  的后验分布  $P(\Theta | D_I)$ ，可将  $E[P_{i,J} | \Theta, D_I]$  中的  $\Theta$  积掉，从而得到  $E[P_{i,J} | D_I]$ ：

$$E[P_{i,J} | D_I] = \exp\{\Gamma_i \nu(D_I) + \Gamma_i T(D_I) (\Gamma_i)' / 2 + e_i' \Sigma_{21}^{(i)} (\Sigma_{11}^{(i)})^{-1} X_i^{(1)}(J) + e_i' \tilde{\Sigma}_{22}^{(i)} e_i / 2\} \quad (2.9)$$

其中，  $\Gamma_i = e_i' ((B)_i^{(2)} - \Sigma_{21}^{(i)} (\Sigma_{11}^{(i)})^{-1} B_i^{(1)})$ 。

各事故年末决赔款准备金估计等于最终赔款估计值减去累计已付赔款，即：

$$R_i = E[P_{i,J} | D_I] - P_{i,J-i}$$

### 2.2.3 CDR 预测分布的随机模拟步骤

在上文关于 CDR 的讨论中，可以不需要估计“开启准备金”和“关闭准备金”，而用年初与年末最终赔款的估计重新定义 CDR：

$$CDR_i = E[P_{i,J} | D_I] - E[P_{i,J} | D_{I+1}] \quad (2.10)$$

事实上，这种表示与式 (2.1) 是一致的。由于在贝叶斯对数正态模型下，可以直接得到最终赔款估计，所以采用式 (2.10) 比式 (2.1) 更为方便。式 (2.10) 中  $E[P_{i,J} | D_{I+1}]$  的

推导过程与结果和  $E[P_{i,j}|D_t]$  相似，其结果为

$$E[P_{i,j}|D_{t+1}] = \exp\{\Gamma_{i-1}\nu(D_{t+1}) + \Gamma_{i-1}T(D_{t+1})(\Gamma_{i-1})' / 2 + e'_{i-1}\Sigma_{21}^{(i-1)}(\Sigma_{11}^{(i-1)})^{-1}X_i^{(1)}(J+1) + e'_{i-1}\tilde{\Sigma}_{22}^{(i-1)}e_{i-1} / 2\} \quad (2.11)$$

在  $E[P_{i,j}|D_t]$  和  $E[P_{i,j}|D_{t+1}]$  推导完成后，可以根据式 (2.10) 对 CDR 进行随机模拟。按照 Ohlsson 和 Lauzenings (2009) 的思路，模拟 CDR 预测分布的步骤如下：

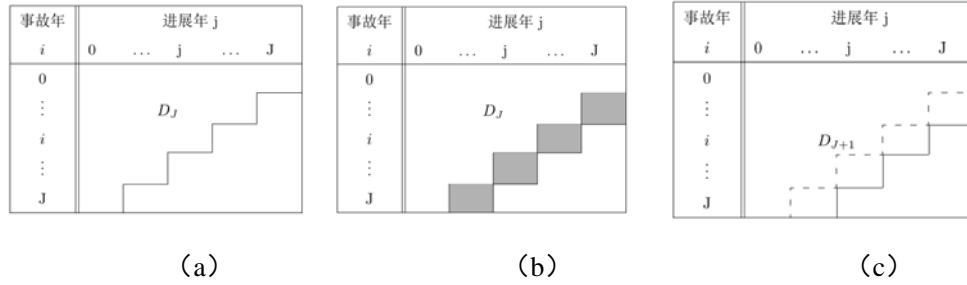


图2.4 CDR的模拟过程

第一步：根据式 (2.9)，估计  $D_t$  条件下最终赔款  $E[P_{i,j}|D_t]$  (图 2.4 (a))。

第二步：循环模拟 CDR (以第  $k$  次模拟为例)。

①模拟未来一年的赔付  $(P_{1,j}^{(k)}, P_{2,j-1}^{(k)}, \dots, P_{t,1}^{(k)})'$  (图 2.4 (b))。在已观测赔付信息  $D_t$  条件下， $\Theta$  的后验分布式 (2.6) 为多元正态分布，因此利用正态随机数生成器可以产生  $\Theta$  的一次观测  $\Theta^{(k)} = (\Phi_0^{(k)}, \Phi_1^{(k)}, \dots, \Phi_J^{(k)})'$ <sup>①</sup>。接下来按照式 (2.3)，利用正态随机数生成器可以产生对数化进展因子的一次观测

$$(\varepsilon_{1,j}^{(k)}, \varepsilon_{2,j-1}^{(k)}, \dots, \varepsilon_{j,1}^{(k)})'$$

进一步可以模拟得到未来一个年度的累积赔付  $(P_{1,j}^{(k)}, P_{2,j-1}^{(k)}, \dots, P_{j,1}^{(k)})'$ 。

②累计赔付  $(P_{1,j}^{(k)}, P_{2,j-1}^{(k)}, \dots, P_{j,1}^{(k)})'$  构成新的对角线，以此填补到原流量三角形中，从而得到更新后的赔付信息  $D_{t+1}^{(k)}$  (图 2.4 (c))。根据式 (2.11)，估计  $D_{t+1}^{(k)}$  条件下最终赔款

$$E[P_{i,j}|D_{t+1}^{(k)}]^{(k)}。$$

③分别计算单个事故年的赔付进展年结果  $CDR_i^{(k)}$  以及各个事故年赔付进展结果之和  $CDR^{(k)}$ ：

<sup>①</sup>可以使用 R 软件 MASS 包中的 `mvrnorm()` 函数产生多元正态分布随机数。

$$CDR_i^{(k)} = E[P_{i,j}|D_i] - E[P_{i,j}|D_{i+1}]^{(k)}$$

$$CDR^{(k)} = \sum_i CDR_i^{(k)} .$$

第三步：第二步循环多次后，可以得到 CDR 样本，进而可以得到 CDR 的预测分布。通过分布的统计特征值，如标准差，分位数等，来对一年期准备金的风险进行度量。

## 2.3 实证研究

### 2.3.1 赔付数据来源与先验参数设定

实证分析的赔付数据来自 Merz 和 Wüthrich (2008)，该数据是 9×9 累计赔款流量三角形，见表 2.2。假定赔付在  $J = 8$  进展年后结清。

表 2.2 累计赔款流量三角形

单位：元

事故年 i	进展年 j								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	2202584	3210449	3468122	3545070	3621627	3644636	3669012	3674511	3678633
1	2350650	3553023	3783846	3840067	3865187	3878744	3898281	3902425	
2	2321885	3424190	3700876	3798198	3854755	3878993	3898825		
3	2171487	3165274	3395841	3466453	3515703	3548422			
4	2140328	3157079	3399262	3500520	3585812				
5	2290664	3338197	3550332	3641036					
6	2148216	3219775	3428335						
7	2143728	3158581							
8	2144738								

参照 Merz 和 Wüthrich (2010) 提供的插值法设定先验参数  $\sigma_j^2$

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{I-j} \sum_{i=0}^{I-j} \left( \log \left( \frac{P_{i,j}}{P_{i,j-1}} \right) - \frac{1}{I-j+1} \sum_{i=0}^{I-j} \frac{P_{i,j}}{P_{i,j-1}} \right)^2$$

结果如表 2.3 所示。

表 2.3 先验参数  $\sigma_j$  的设定

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma_j$	0.0379	0.0135	0.0070	0.0051	0.0069	0.0024	0.0009	0.0003	0.0009

此外，我们令  $\phi_j = 1$ ， $s_j^2 = 100000000$ ，所以向量  $\Theta = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_8)'$  近似服从无信息先验分布。

### 2.3.2 参数估计、最终赔款估计以及准备金估计<sup>①</sup>

<sup>①</sup>作者已将实证研究的源数据和 R 程序置于 [http://gaolei786.github.io/code/reserve\\_risk/](http://gaolei786.github.io/code/reserve_risk/)，有兴趣的读者可下载使用，也欢迎来函索取。

上一小节设定参数  $\Theta = (\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_8)'$  服从无信息先验分布，在给定累计赔款数据后，根据贝叶斯公式，可以对  $\Theta$  的先验分布进行更新，得到  $\Theta$  的后验分布  $P(\Theta|D_8)$ 。我们已经证明， $P(\Theta|D_8)$  后验分布仍然是正态分布，根据式 (2.7) 和式 (2.8) 可以得到正态分布的协方差矩阵  $T(D_8)$  和均值向量  $\nu(D_8)$ 。计算结果表明，协方差矩阵  $T(D_8)$  非对角元素均是 0，对角元素如表 2.4 第二行所示，后验均值向量  $\nu(D_8)$  如表 4 第三行所示。

表 2.4 后验协方差矩阵对角元素和均值向量的估计

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$T(D_8)_{(j,j)}$	1.6e-04	2.3e-05	7.1e-06	4.3e-06	9.4e-06	1.4e-06	2.8e-07	4.7e-08	8.5e-07
$\nu(D_8)_{(j)}$	14.6091	0.3891	0.0695	0.0230	0.0162	0.0063	0.0056	0.0013	0.0011

利用  $T(D_8)$  和  $\nu(D_8)$  的估计结果，根据式 (2.9) 可以得到各事故年的最终赔款估计  $E[P_{i,8}|D_8]$ ，如表 2.5 粗体数据所示。其中， $i = 0$  事故年的最终赔款 3678633 元是累计已付赔款数据，不需要估计，不过为方便后面讨论，这里也将其看成是估计值。最终赔款减去累计已付赔款，得到各事故年未决赔款准备金估计，如表 2.5 最后一列所示。各事故年准备金估计加总就得到总体准备金估计 2243948 元。

表 2.5 最终赔款、未决赔款准备金的估计

单位：元

i	进展年 j									准备金
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	2202584	3210449	3468122	3545070	3621627	3644636	3669012	3674511	<b>3678633</b>	0
1	2350650	3553023	3783846	3840067	3865187	3878744	3898281	3902425	<b>3906806</b>	4381
2	2321885	3424190	3700876	3798198	3854755	3878993	3898825		<b>3908202</b>	9377
3	2171487	3165274	3395841	3466453	3515703	3548422			<b>3576921</b>	28499
4	2140328	3157079	3399262	3500520	3585812				<b>3637619</b>	51807
5	2290664	3338197	3550332	3641036					<b>3753957</b>	112921
6	2148216	3219775	3428335						<b>3616839</b>	188504
7	2143728	3158581							<b>3572156</b>	413575
8	2144738								<b>3579623</b>	1434885

### 2.3.3 CDR 的预测分布

应用随机模拟方法得到 CDR 的预测分布，这里设定模拟次数为 5000。以第 5 次模拟为例（记  $k=5$ ），表 2.6 展示了得到赔付进展结果模拟值  $CDR_i^{(k=5)}$  的过程。首先，利用随机数生成器模拟得到各事故年（除  $i=0$  事故年外）在未来一年内的累计赔款

$(P_{1,8}^{(5)}, P_{2,7}^{(5)}, \dots, P_{8,1}^{(5)})'$ ，这 8 个模拟数据构成新的对角线（如表 2.6 中粗线框数据所示），并以此加入到原来的累计赔款流量三角形  $D_8$  中，从而构成新的累计赔款流量三角形  $D_9$ 。然后，在新的赔款流量三角形  $D_9$  基础上，利用式 (2.11) 得到最终赔款的再估计  $E[P_{i,8}|D_9]^{(k=5)}$ ，结果如表 2.6 中粗体数据所示。 $E[P_{i,8}|D_9]^{(k=5)}$  与上一小节得到的最终赔款估计  $E[P_{i,8}|D_8]$  相减，就得到各事故年赔付进展结果的模拟值  $CDR_i^{(k=5)}$ ，如表 2.6 最后一列数据所示。各事故年的赔付进展结果加总就得到总体赔付进展结果的模拟值  $CDR^{(k=5)} = -15518$ 。

表 2.6 新对角线赔款模拟、最终赔款再估计以及 CDR 模拟 单位：元

i	进展年 j								CDR	
	0	1	2	3	4	5	6	7		8
0	2202584	3210449	3468122	3545070	3621627	3644636	3669012	3674511	<b>3678633</b>	0
1	2350650	3553023	3783846	3840067	3865187	3878744	3898281	3902425	<b>3911178</b>	-4372
2	2321885	3424190	3700876	3798198	3854755	3878993	3898825	3901692	<b>3908258</b>	-56
3	2171487	3165274	3395841	3466453	3515703	3548422	3558944		<b>3568852</b>	8069
4	2140328	3157079	3399262	3500520	3585812	3600139			<b>3628033</b>	9586
5	2290664	3338197	3550332	3641036	3717673				<b>3768550</b>	-14593
6	2148216	3219775	3428335	3561190					<b>3671722</b>	-54883
7	2143728	3158581	3388142						<b>3582214</b>	-10059
8	2144738	3113240							<b>3528832</b>	50791

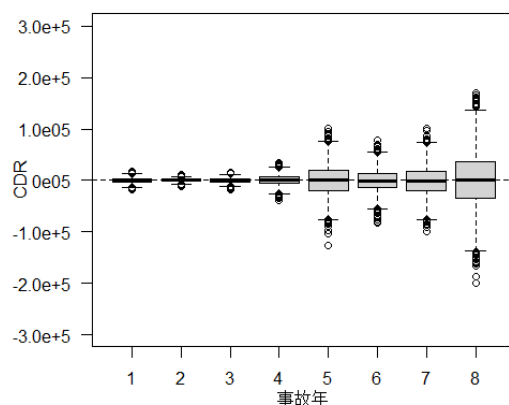


图 2.5(a) 各事故年 CDR、未决赔款箱线图

每一次模拟可以得到各事故年 CDR 的模拟值，经过 5000 次模拟后，就得到各事故年 CDR 的模拟样本，图 2.5 (a) 描绘了各事故年 CDR 样本的箱线图。观察图 2.5 (a) 可以发现，各事故年 CDR 的期望都接近于 0，说明 CDR 是以 0 为中心上下波动的随机变量，这与前面的讨论一致。另外，每个事故年的 CDR 又具有一定程度的波动，甚至还会产生特别大或特别小的极端异常值，这种波动特征正是一年期准备金风险的体现。

为了与传统准备金评估比较，我们还利用随机模拟方法得到了各事故年未决赔款的样本，图 2.5 (b) 描绘了各事故年未决赔款模拟样本的箱线图。为了方便比较，未决赔款都经过了中心化处理，即减去了各事故年的准备金估计（如表 2.5 最后一列所示），因此未决赔款的期望也都是 0。对比图 2.5 (a) 和图 2.5 (b) 可以发现，对于相同的事故年，CDR 比未决赔款的波动程度要小。这是因为，一年期准备金风险主要考虑未来一个年度内赔款的变动，而终期准备金评估则考察从评估时刻到业务结清为止，所有未决赔款的波动情况，因此一年期准备金风险与传统准备金评估相比，更有效地度量了不确定性，从而更精确地度量了准备金风险。

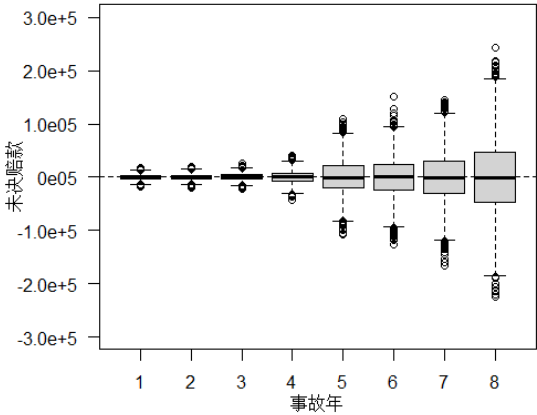


图 2.5(b) 各事故年未决赔款箱线图

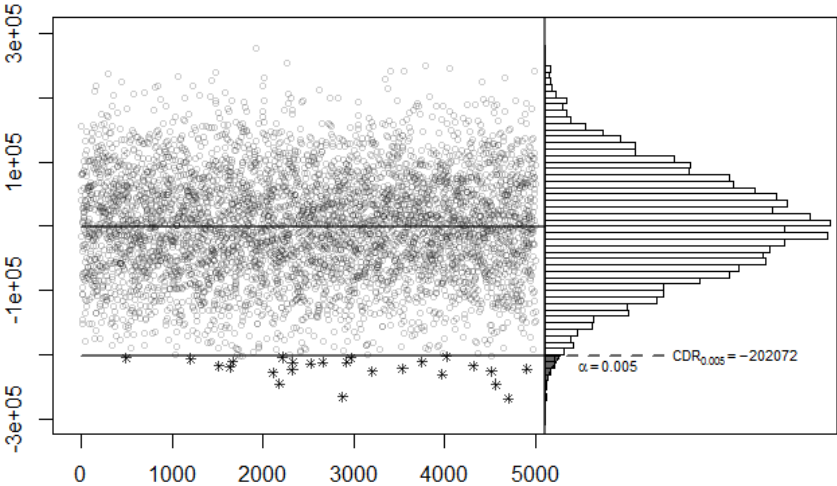


图 2.6 CDR 散点及直方图

将各事故年 CDR 加总就得到总体 CDR 模拟值，5000 次总体 CDR 的模拟结果如图 2.6 所示。图 2.6 左侧是 CDR 的散点图，穿越散点图中心的水平线表示 CDR 的样本均值，接近于 0。换句话说，CDR 是以 0 为中心上下波动的随机变量，从中间至上下两侧散点图呈



现的疏密变化显示了 CDR 的波动程度。图 2.6 右侧是 CDR 样本的直方图，可以近似作为 CDR 的预测分布。可以发现，CDR 的预测分布呈“钟形”，与正态分布接近。计算 CDR 样本的 0.005 分位数，其值大小为-202072。这个值的经济含义是明显的，如果用星点标示低于这个值的 CDR 散点，那么这些散点发生的概率为 0.005，这与欧盟偿付能力 II 强调的“200 年一遇”相一致，因此可以得到结论，202072 是与一年期准备金风险相对应的偿付能力资本要求。

表 2.7 报告了各事故年 CDR 以及总体 CDR 的统计分布特征。观察 CDR 的位置特征可以发现，CDR 的均值和中位数都接近于 0，尤其是相对于其他波动统计特征（比如 2.5% 分位数）而言，这说明 CDR 是以 0 为中心上下波动的随机变量，这也佐证了由图 2.5（a）和图 2.6 得到的结论。表 7 中还报告了度量 CDR 波动性的统计特征值，有均值、2.5%分位数、97.5%分位数、本文方法与 Happ 等（2012）方法得到的 CDR 预测均方误差结果和未决赔款的预测均方误差。

表 2.7 CDR 的分布特征

单位：千元

	均值	2.5%分位数	中位数	97.5%分位数	CDR 预测均方误差		未决赔款的预测均方误差
					本文方法	Happ 等（2012）方法	
1	41	-9952	42	9733	5083	5121	5120
2	32	-5686	88	5684	2939	2955	5330
3	-104	-8778	-182	8665	4510	4511	6200
4	215	-18962	154	19569	9847	9921	11461
5	-286	-56598	344	55286	28368	28447	30625
6	-382	-40892	-470	40016	20569	20617	35564
7	-512	-53538	-697	52231	27229	27584	44234
8	705	-100913	1640	99623	51535	51838	67844
总计	-290	-160878	415	157667	81767	82551	110244

通过对比可以发现，第一，本文方法计算的 CDR 预测均方误差是由计算 CDR 模拟样本的标准差得到的数值解，与利用 Happ 等（2012）的方法得到的解析结果比较有些微小差异，但如果进一步增加模拟次数，这种差异可以忽略，这说明基于 CDR 预测分布的一年期准备金风险随机模拟度量方法的精度达到了解析解的效果。第二，除第一个事故年外，其他事故年 CDR 的预测均方误差都小于未决赔款的预测均方误差，这也再次验证了图 2.5（a）和图 2.5（b）比较得到的结论。

## 2.4 本章小结

Solvency II 监管框架对非寿险公司的风险管控提出了新的要求。本章通过实例直观通

俗地解释了一年期准备金风险的含义，还介绍了 CDR 这一概念，并在贝叶斯对数正态模型假设下，利用随机模拟方法获得 CDR 的预测分布，从而实现对一年期准备金风险的度量。本章考察了一年期准备金风险与传统准备金评估的区别，并借助于 CDR 预测分布和未决赔款的统计特征值进行了说明。

本章研究发现：对非寿险公司而言，相对于传统终期准备金的评估，一年期准备金风险的管控更加重要。CDR 是描述一年期准备金风险的核心工具，对一年期准备金风险的刻画可以通过对 CDR 波动性的度量进行分析。基于真实非寿险业务数据的实证结果表明：在贝叶斯对数正态模型下，利用随机模拟方法得到的预测均方误差与解析结果非常接近，更为重要的是，采用模拟方法获得 CDR 预测分布，与解析推导预测均方误差相比，具有明显优势；另外，CDR 比未决赔款的波动程度要小；计算 CDR 样本的 0.005 分位数，还可以得到 Solvency II 监管框架所要求的偿付能力资本要求。

作为进一步的研究方向，第一，可以进一步深入考虑分层贝叶斯广义线性可加模型及其它扩展模型，并合理分析模型选择对一年期准备金风险的影响程度。第二，随机模拟方法方面，除了 MCMC 之外，作为一种波动性度量技术，对流量三角形的残差进行深入分析也是很有研究价值的，如保险数据残差的时间、空间相关性分析以及相应的分层分区域 Bootstrap 技术等。

### 第 3 章 残差相关条件下非寿险准备金风险度量研究

针对精算实务中赔付数据残差三角形不满足独立性假设情形，首先基于多重假设检验理论与错误发现率（FDR）控制过程，对残差三角形是否具有相关性进行识别和检验；然后提出两阶段分区域 Bootstrap 方法，模拟获得未决赔款的预测分布，分析残差相关性对准备金风险波动的影响；最后，保险公司真实索赔数据的实证结果表明：消除残差三角形相关性的影响，可以增强准备金估计的稳健性，从而有效提高准备金风险度量的准确性。

#### 3.1 Bootstrap 方法应用中的残差相关性问题

##### 3.1.1 Bootstrap 方法在 ODP 模型中的应用

本节参照 Renshall 和 Verall（1998）提出的 ODP 模型，首先简要介绍 Bootstrap 方法在 ODP 模型中的应用，然后对实际数据进行可视化图示分析，说明 Bootstrap 应用中残差三角形存在的相关性问题。

###### （1）Bootstrap 方法在 ODP 模型中的应用

将事故年记作  $i \in \{0, 1, \dots, I\}$ ，进展年记作  $j \in \{0, 1, \dots, J\}$ ，将第  $i$  事故年发生的保险事故在第  $j$  进展年的增量赔款记作  $X_{i,j}$ 。另外，不失一般性，假设  $I = J$ 。

$D_I = \{X_{i,j} : 0 \leq i + j \leq J; 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}$  表示上三角增量赔款数据。

ODP 模型的基本假设是，增量赔款  $X_{i,j}$  相互独立，并服从超散布泊松分布，即：

$$\frac{X_{i,j}}{\phi_j} \sim \text{Poisson}(\mu_i \gamma_j / \phi_j) \quad (3.1)$$

按照上述假设，增量赔款  $X_{i,j}$  的期望和方差分别为：

$$E(X_{i,j}) = m_{i,j} = \mu_i \gamma_j \quad \text{Var}(X_{i,j}) = \phi_j \mu_i \gamma_j = \phi_j m_{i,j} \quad (3.2)$$

式（3.2）表明，增量赔款  $X_{i,j}$  的方差与期望并不相等，两者具有倍数（ $\phi_j$ ）关系，这正是“超散布”的意义所在。式（3.2）中，增量赔款  $X_{i,j}$  的期望是  $\mu_i$  和  $\gamma_j$  的乘积。如果进一步假设：

$$\sum_{j=0}^J \gamma_j = 1$$

那么， $\mu_i$  和  $\gamma_j$  就具有清晰的含义， $\mu_i$  表示事故年  $i$  的总赔款， $\gamma_j$  则表示第  $j$  进展年

的增量赔款在事故年  $i$  总赔款中的占比。

ODP 模型是广义线性模型的一种，如果将增量赔款  $X_{i,j}$  的期望对数化：

$$\log(m_{i,j}) = \log(\mu_i \gamma_j) = \alpha_i + \beta_j \quad (3.3)$$

那么式 (3.3) 就是广义线性模型的对数连接函数。利用极大似然估计方法，可以得到  $\alpha_i$  和  $\beta_j$  的估计  $\hat{\alpha}_i$  和  $\hat{\beta}_j$ ，进而得到参数  $\mu_i$ 、 $\gamma_j$  和  $m_{i,j}$  的估计：

$$\hat{\mu}_i = \exp(\hat{\alpha}_i) \quad \hat{\gamma}_j = \exp(\hat{\beta}_j) \quad \hat{m}_{i,j} = \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j \quad (3.4)$$

根据上述参数估计，按照下式预测未决增量赔款：

$$\hat{X}_{i,j} = \hat{m}_{i,j} = \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j$$

这些预测值构成增量赔款下三角形： $D_l^c = \{X_{i,j} : I < i + j \leq 2I; 1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}$ 。

将下三角增量赔款数据加总，得到未决赔款准备金估计：

$$R = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I+1-i}^I \hat{X}_{i,j} \quad (3.5)$$

未决赔款准备金估计  $R$  只是未决赔款的点估计，为了衡量该估计的准确性和刻画未决赔款的波动性，可以利用 Bootstrap 方法得到未决赔款的预测分布，并通过分布的统计特征值，如标准差、分位数等，来对准备金风险的准确性波动性进行度量。在 ODP 模型中，应用 Bootstrap 方法的步骤如下：

步骤 1：拟合模型，计算残差。采用极大似然估计方法，得到参数估计值后，按照下式计算残差：

$$r_{i,j} = \frac{X_{i,j} - \hat{m}_{i,j}}{\sqrt{\hat{\phi}_j \hat{m}_{i,j}}} \quad 0 \leq i + j \leq J; 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I \quad (3.6)$$

式 (3.6) 中， $\hat{\phi}_j$  是散布参数  $\phi_j$  的估计值：

$$\hat{\phi}_j = \sum_{i=0}^{I-j} \left( \left( \frac{N}{N-p} \right)^{1/2} (X_{i,j} - \hat{m}_{i,j}) \right)^2 / (I-j+1) \quad (3.7)$$

其中， $N$  是赔款数据个数， $p$  是参数个数。当  $I = J = 3$  时， $N = 10$ ， $p = 9$ 。

这里， $\hat{m}_{i,j}$  是  $X_{i,j}$  的均值，而  $\sqrt{\hat{\phi}_j \hat{m}_{i,j}}$  是  $X_{i,j}$  的标准差，因此上式相当于对  $X_{i,j}$  标准化，

所以  $r_{i,j}$  又称为 Pearson 标准化残差。这些残差组成残差三角形，当  $I = J = 3$  时，残差三角形如图 3.1 (a) 所示。

事故年 $i$	进展年 $j$			
	0	1	2	3
0	$r_{0,0}$	$r_{0,1}$	$r_{0,2}$	$r_{0,3}$
1	$r_{1,0}$	$r_{1,1}$	$r_{1,2}$	
2	$r_{2,0}$	$r_{2,1}$		
3	$r_{3,0}$			

(a) 残差三角形

事故年 $i$	进展年 $j$			
	0	1	2	3
0	$r_{0,0}^*$	$r_{0,1}^*$	$r_{0,2}^*$	$r_{0,3}^*$
1	$r_{1,0}^*$	$r_{1,1}^*$	$r_{1,2}^*$	
2	$r_{2,0}^*$	$r_{2,1}^*$		
3	$r_{3,0}^*$			

(b) Bootstrap 残差三角形

事故年 $i$	进展年 $j$			
	0	1	2	3
0	$X_{0,0}^*$	$X_{0,1}^*$	$X_{0,2}^*$	$X_{0,3}^*$
1	$X_{1,0}^*$	$X_{1,1}^*$	$X_{1,2}^*$	
2	$X_{2,0}^*$	$X_{2,1}^*$		
3	$X_{3,0}^*$			

(c) Bootstrap 上三角增量赔款

事故年 $i$	进展年 $j$			
	0	1	2	3
0				
1				$X_{1,3}^*$
2			$X_{2,2}^*$	$X_{2,3}^*$
3		$X_{3,1}^*$	$X_{3,2}^*$	$X_{3,3}^*$

(d) Bootstrap 下三角增量赔款

图 3.1 在 ODP 模型中 Bootstrap 方法的应用

步骤 2: 对残差有放回地重抽样。从残差三角形中随机地抽出一个残差作为 Bootstrap 残差。例如，第一次可能抽到了  $r_{2,0}$ ，然后令  $r_{0,0}^* = r_{2,0}$ ，这样  $r_{0,0}^*$  就是 Bootstrap 残差。接着，将  $r_{2,0}$  放回到原残差三角形中，再重复上面的抽取过程，最终得到 Bootstrap 残差三角形：

$$\{r_{i,j}^* : 0 \leq i + j \leq J; 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}$$

当  $I = J = 3$  时，Bootstrap 残差三角形如图 3.1 (b) 所示。

步骤 3: 构造 Bootstrap 上三角增量赔款数据。反向利用 Pearson 标准化残差式 (3.6)，计算 Bootstrap 增量赔款  $X_{i,j}^*$ ：

$$X_{i,j}^* = r_{i,j}^* \sqrt{\hat{\phi}_j \hat{m}_{i,j}} + \hat{m}_{i,j} \quad 0 \leq i + j \leq J; 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I \quad (3.8)$$

其中， $r_{i,j}^*$  是步骤二中得到的 Bootstrap 残差。按照式 (3.8)，最终得到 Bootstrap 上三角增量赔款：

$$D_I^* = \{X_{i,j}^* : 0 \leq i + j \leq J; 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}.$$

当  $I = J = 3$  时，Bootstrap 上三角增量赔款如图 3.1 (c) 所示。

步骤 4: 基于 Bootstrap 上三角增量赔款数据  $D_i^*$ , 再次拟合 ODP 模型, 按照式 (3.4) 得到下三角增量赔款的均值估计  $\hat{m}_{i,j}^*$ 。

步骤 5: 模拟下三角增量赔款。利用步骤四的均值估计  $\hat{m}_{i,j}^*$ , 首先从期望为  $\hat{m}_{i,j}^*/\hat{\phi}_j$  的泊松分布抽取一个随机数, 然后再乘以散布参数  $\hat{\phi}_j$ , 就得到服从超散布泊松分布的增量赔款  $X_{i,j}^*$ :

$$\frac{X_{i,j}^*}{\hat{\phi}_j} \sim \text{Poisson}(\hat{m}_{i,j}^*/\hat{\phi}_j) \quad I < i + j \leq 2I; 1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I$$

当  $I = J = 3$  时, 模拟的下三角增量赔款如图 3.1 (d) 所示。

将下三角增量赔款加总, 便可得到未决赔款的一次 Bootstrap 模拟值  $R^*$ :

$$R^* = \sum_{i=1}^I \sum_{j=I+1-i}^I X_{i,j}^*$$

步骤 6: 不断重复以上步骤 1-5, 可以得到未决赔款的 Bootstrap 样本。当循环次数足够多时, Bootstrap 样本的经验分布就近似于未决赔款的预测分布, 有了预测分布之后, 通过分布的统计特征值 (如标准差, 分位数等), 就可以对准备金风险进行度量。

### 3.1.2 残差三角形相关性问题

在 ODP 模型中应用 Bootstrap 方法, 一个重要条件是残差三角形必须相互独立。然而在精算实务中, 研究人员常常默认该条件是成立的, 并没有对其进行检验。事实上, 对于大部分数据而言, 残差三角形相互独立的假设未必成立。本节我们通过一个实际的数据进行图示分析, 数据为保险公司真实的增量赔款数据, 来源于 Verrall 和 Wüthrich (2012)。

该增量赔款三角形共有 22 个事故年, 22 个进展年。限于篇幅, 这里不直接展示原始数据, 作者已将源数据以文本文件形式置于网站<sup>①</sup>上, 有兴趣的读者可以下载使用。这里, 我们将该赔款三角形先通过 R 软件做一个立体图形来表示, 如图 3.2 所示。其中横向表示事故年, 纵向表示进展年。ODP 模型假设这些增量赔款相互独立, 但图 3.2 的形状却可能暗示, 相邻事故年和进展年的增量赔款可能具有相关性。下面的分析将为这一猜测提供进一步的证据。

在原始增量赔款三角形数据基础上, 基于 ODP 模型的拟合, 通过计算 Pearson 标准化

<sup>①</sup>网址: [http://gaolei786.github.io/code/block\\_boot/](http://gaolei786.github.io/code/block_boot/)。增量赔款数据、残差数据、本文编程的 R 代码等内容, 均可以从该网址下载。当然, 也欢迎来函索取。

残差，可以得到一个横向 22 个事故年，纵向 22 个进展年的残差三角形。与图 3.2 类似，把这些残差立体可视化，见图 3.3。其中，向上实心点表示正的残差，向下空心点表示负的残差。增量赔款的独立性意味着这些 Pearson 标准化残差也是独立的，但仔细观察图 3.3 的第 1 列，前 7 个残差都为正，这似乎与残差独立性假设相悖。不过，由于这些立体散点比较密集，我们不易观察到其他明显的规律。

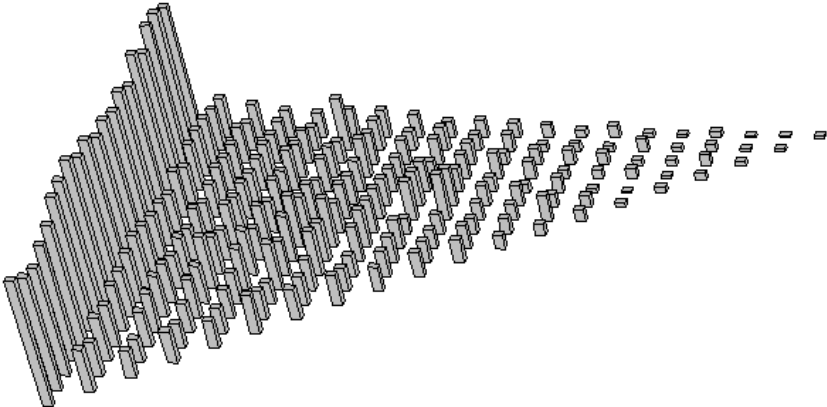


图 3.2 增量赔款三角形的立体图

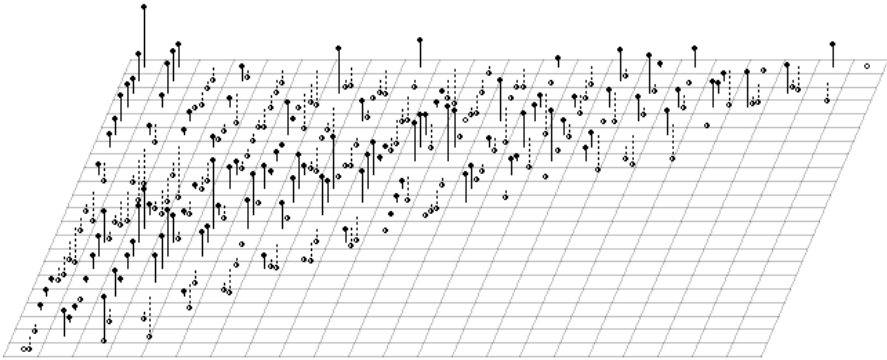


图 3.3 Pearson 标准化残差立体图

为了更直观地观察这个残差三角形，我们采取另一种展示方式。把大于 0 的残差简记为“+”，小于 0 的残差简记为“-”，等于 0 的残差记为“0”，然后在一个二维平面上作出残差“符号”三角形，如图 3.4 所示。依据 ODP 模型假设，增量赔款  $X_{i,j}$  是独立的，因此 Pearson 标准化残差也是独立的，并且以 0 为中心上下波动。而且，由此可以进一步猜想，既然残差是独立的，那么代表残差符号的“+”和“-”就应该随机地散布在三角形当中，或者说，“+”

和“-”出现的位置不应有特殊的明显规律。

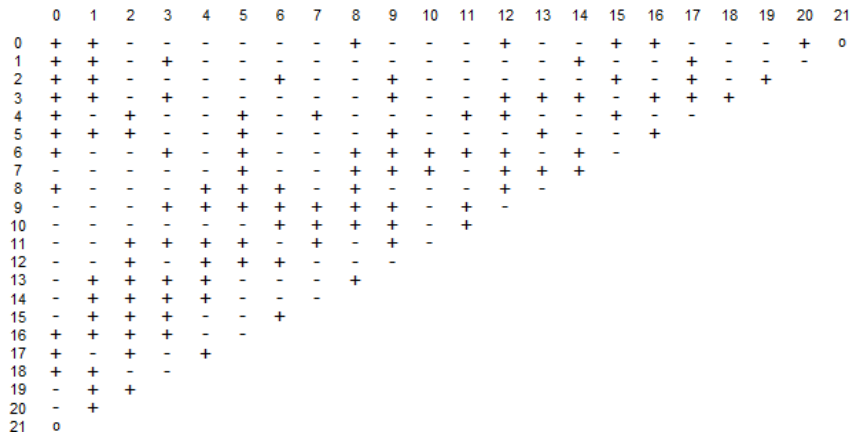


图 3.4 残差符号三角形

但在图 3.4 中，有多个连续“+”（或“-”）一起出现的情况发生。横向看，以第 1 事故年（第 2 行）残差为例，连续 10 个残差  $\{r_{1,4}, r_{1,5}, \dots, r_{1,13}\}$  都为“-”；纵向观察，以第 0 进展年的残差（第 1 列）为例，其中连续 7 个残差  $\{r_{0,0}, r_{1,0}, \dots, r_{6,0}\}$  都是“+”，然后，从第 9 个事故年开始，又有连续 7 个残差  $\{r_{9,0}, r_{10,0}, \dots, r_{15,0}\}$  又都是“-”；以 4 进展年（第 5 列）的残差为例，其中有连续 8 个残差  $\{r_{0,4}, r_{1,4}, \dots, r_{7,4}\}$  都为“-”。凡此种种，不一而足，由此可见，残差三角形必然具有某种相关结构，完全独立性假设不成立。

残差三角形内部存在相关性，意味着赔付流量三角形数据具有依赖关系。这种依赖关系可以从赔付流量三角形数据的收集整理过程得到解释，也和非寿险保单的销售、理赔具有密切关系，此外还可能是社会经济大环境周期性影响的结果。由多笔理赔保单整合得到的流量三角形数据常常具有重复观测的特点，比如不同事故年在同一进展年的重复观测，同一事故年在不同进展年的重复观测，甚至于不同公司在同一业务上的重复观测，而重复观测数据一般都会具有某种程度上的相关性。另外，对一个险种而言，其保单销售会经历一个成长周期，这就会使赔付三角形的事故年数据呈现相关性；而每个事故年的事故保单，会在连续几个进展年内赔付结清，因此赔付三角形的进展年数据也可能具有相关性；由于经济环境的周期性影响，会计年的赔付数据自然也可能具有某种程度的相关性。

## 3.2 残差三角形相关性的多重假设检验与两阶段

### 分区域 Bootstrap 方法

#### 3.2.1 残差三角形相关性的多重假设检验与 FDR 控制



上一节，通过对残差三角形的图示观察，我们得到的直观印象是残差并不相互独立，而是具有某种相关结构。本节将给出定量的统计检验方法来判别残差三角形是否满足独立性假设。

统计中用于检验某一序列是否独立的常用方法之一是游程检验。以一个长度为 22 的序列为例：++++-----，开头连续出现的 4 个“+”是一个游程，后续的 3 个“-”是一个游程，以此类推，该序列共有 6 个游程。游程检验的基本思想是，在原假设成立的条件下，即如果“+”和“-”的产生是完全独立的，那么这个序列的游程数目不会太多也不会太少。当一个序列游程数目过多，或者游程数目过少时，在一定的显著性水平下，就可以拒绝原假设。比如，序列 +--+--+--+--+--+--+--+ 有多达 11 个游程，而序列 ++++++----- 只有 2 个游程，显然这两个序列并不是独立的，前者呈现负相关，而后者具有明显的正相关。

利用游程检验的原理，我们将图 3.4 残差符号三角形中的某一行或某一列都分别看成为一序列。下面我们基于多重假设检验理论与 FDR 控制过程，对图 3.4 进行检验，检验识别出那些具有相关性（不满足独立性）的残差。

我们分别依次从残差符号三角形的横向与纵向进行检验。横向方面，是检验每个事故年的残差是否独立；纵向方面，是检验每个进展年的残差是否独立。由于游程检验要求样本容量最低不得少于 3 个，而图 3.4 中第 20、21 进展年以及第 20、21 事故年的残差数量不足 3 个，所以无法对其进行检验。除此之外，用流程检验方法对其余残差依次分别进行独立性假设检验，共进行 40 次，得到 40 个 p 值，结果如图 3.5 所示。

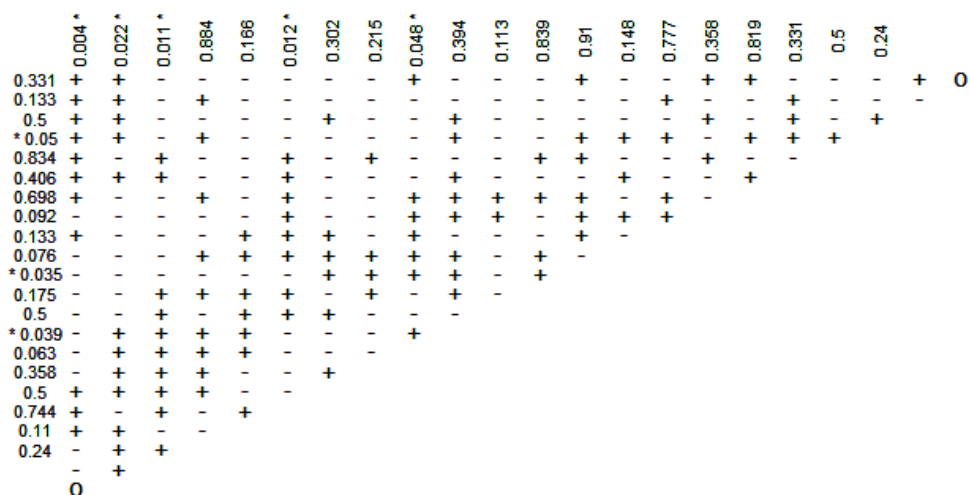


图 3.5 40 个游程检验的 P 值

设定显著性水平  $\alpha = 0.05$ ，如果按照单个假设检验的标准进行判断，可以得到以下结

论：横向事故年，第 3,10,13 行的 p 值小于 0.05（在图 3.5 中以“\*”表示）；纵向进展年，第 0,1,2,5,8 列的 p 值小于 0.05（在图 3.5 中以“\*”表示）。所以，这几个事故年和进展年对应的残差检验都拒绝了独立性原假设，由此可以初步判定，残差三角形并非完全独立。

然而，以上结论单个看没有问题，但全面系统分析，则会存在错误判断（发现）问题。事实上，残差三角形是一个整体，我们不能孤立地检验它的某一行或某一列残差的独立性，应该从整体上，同时对所有的行与列进行系统检验。在上面的检验过程中，一共进行了 40 次单个的假设检验。这时，即使控制显著性水平  $\alpha$  为 0.05，但由于检验的个数增多，检验犯第一类错误的概率会大大增加。理论上可以证明，在同时进行 40 个假设检验的情况下，犯第一类错误的概率是 0.87，远大于 0.05。<sup>①</sup>这意味着，虽然事故年第 3,10,13 行、进展年第 0,1,2,5,8 列的残差都拒绝了原假设，但是，其中至少有一个错误地拒绝原假设的概率接近 90%。换句话说，事故年第 3,10,13 行、进展年第 0,1,2,5,8 列的残差中，可能有些本来是独立的，但却误判为非独立的，而且误判概率很高。

实际上，以上检验面临的是一个多重假设检验问题。对于多重假设检验，再用控制犯第一类错误概率的方法来对总体的错误进行度量，就会出现无效情形。为了解决以上错误发现问题，必须采用新的统计方法对多重假设检验的错误进行控制。传统的多重假设检验控制过程有控制族错误率（FWER: Family-wise Error Rate），有 Bonferroni 控制过程、改进的 Bonferroni 控制过程、逐步向上控制过程等。目前，最为流行的多重假设检验方法是错误发现率（FDR）控制过程，具体方法参见 Benjamini and Hochberg（1995），刘乐平等（2007）等。

在本章讨论的例子中，我们初步“发现”事故年第 3,10,13 行、进展年第 0,1,2,5,8 列的残差是非独立的，进一步证明，在这些发现当中，至少含有一个错误“发现”的概率会高达 87%。FDR 控制过程就是要设法控制住错误“发现”的概率，降低假设检验中的误判概率。本章给出检验残差三角形独立性假设的 FDR 控制过程的三个步骤：

步骤一：对所有单个假设检验对应的 p 值进行排序。即将 N 重假设检验的 p 值  $\{p_1, p_2, \dots, p_N\}$  升序排序，记为：

$$p_{(1)} \leq p_{(2)} \leq \dots \leq p_{(N)}$$

步骤二：确定临界点。给定错误发现率水平  $\alpha$ ，取  $k_{\max} = \max_k \left\{ k : p_{(k)} \leq \frac{k}{N} \alpha \right\}$

<sup>①</sup> 犯第一类错误的概率公式： $P = 1 - (1 - 0.05)^{40} = 0.87$ ，这被称为“第一类错误率的膨胀”（Type I Error Rate Inflation）。

步骤三：比较判别。拒绝  $p_{(1)}, p_{(2)}, \dots, p_{(k_{\max})}$  所对应的原假设  $H_{(1)}, H_{(2)}, \dots, H_{(k_{\max})}$

按照上述三个步骤，进一步分析我们的例子。将  $N = 40$  个  $p$  值升序排序，并设定错误发现率水平  $\alpha = 0.2$ ，计算可以得到  $k_{\max} = 3$ 。因此，与前三个  $p$  值  $p_{(1)} = 0.004, p_{(2)} = 0.011, p_{(3)} = 0.012$  相对应的进展年第 0,2,5 列的原假设被拒绝，它们被认为是正确的“发现”，而通过单重假设检验得到的一些“发现”：事故年第 3,10,13 行、进展年第 1,8 列的残差是非独立的，实际上是错误的“发现”，可以利用 FDR 控制过程将它们“正名”。图 3.6 展示了 FDR 的控制结果，其中实线框是正确的“发现”，虚线框为错误的“发现”，我们最后保留的是正确的“发现”，即认为进展年第 0,2,5 列的残差是相关的。

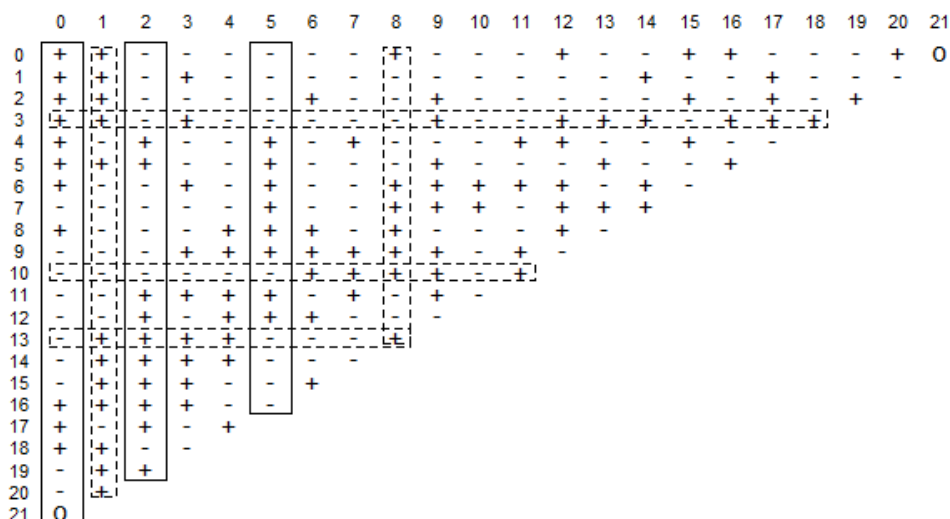


图 3.6 FDR 控制结果

还可以从另一角度论证上述结论的合理性。如果设置显著性水平为 0.015 (0.015 大于三个显著性结果的  $p$  值)，那么在 40 个残差块均是独立同分布的情况下，出现显著检验结果的数目服从二项分布，二项分布的均值仅为  $40 \times 0.015 = 0.6$  个，标准差为  $\sqrt{40 \times 0.015 \times 0.985} \approx 0.7$  个，因此虚假显著性结果数目 95% 的置信区间是  $[0, 2]$  个。而在 0.015 检验水平下，40 次相关性检验的显著性结果共有 3 个，落在了上述 95% 置信区间之外！因此第 0、2、5 列三个残差块的相关性在统计上具有显著意义。

### 3.2.2 两阶段分区域 Bootstrap 方法

通过上节游程检验和多重假设检验 FDR 控制过程，可以识别出残差三角形一些行和列上的残差不满足 Bootstrap 的独立性假设。但与此同时，我们也注意到，与整个残差三角形相比，具有显著相关结构的残差数量有限。在我们的例子中，共有 20 个事故年和 20 个进

展年的残差，而其中只有 3 个进展年的残差是显著相关的。

有鉴于此，我们提出两阶段分区域 Bootstrap 方法，解决残差三角形具有相关性的准备金评估和风险分析问题。具体思路是将传统的 Bootstrap 方法分成两个阶段进行：阶段一：按照多重假设检验与 FDR 控制结果，将残差三角形分成两类区域——残差相关区域（包含显著相关性残差的区域）和残差独立区域；阶段二：对于残差相关区域，先按“+”“-”号进行分离，再进行 Bootstrap 抽样。对于残差独立区域，仍然采用传统的 Bootstrap 方法进行抽样。

两阶段分区域 Bootstrap 方法，首先是区域划分。利用游程检验和 FDR 控制过程找到不满足独立性假设的行和列后，进一步在这些行和列上进行区域划分。对包含相关性残差的行或列进行子域划分，连贯次数最多的“+”号残差组成一个“正相关子域”，连贯次数最多的“-”号残差组成一个“负相关子域”，都用虚线框标示，剩余的没有明显相关结构的残差不做标记。

在本章所讨论的例子中，基于游程检验和 FDR 控制过程，我们发现进展年第 0,2,5 列的残差具有某种相关结构。因此，对于这几个进展年，分别标出连贯次数最多的“+”和“-”，它们组成单独的“正相关子域”和“负相关子域”，如图 3.7 所示。

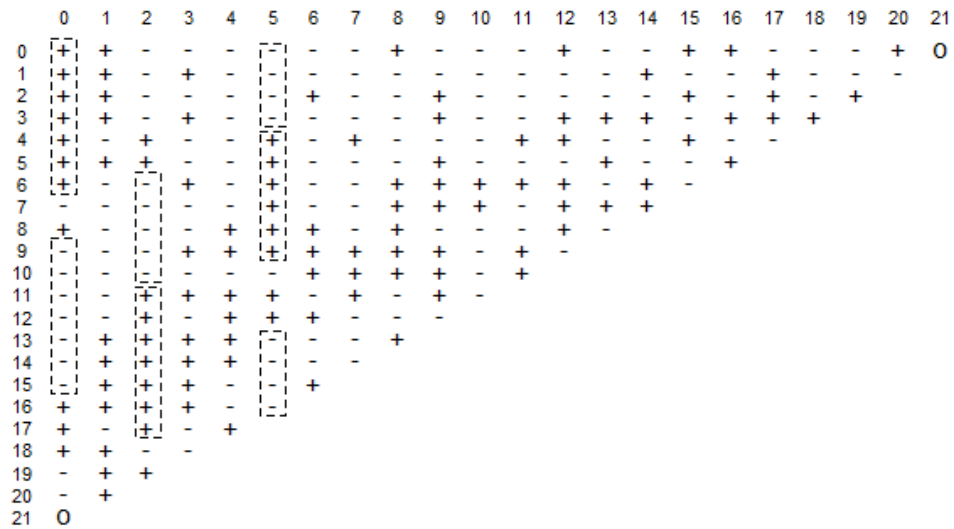


图 3.7 残差区域划分

图 3.7 中，第 0 进展年连续七个“+”号的残差  $\{r_{0,0}, r_{1,0}, \dots, r_{6,0}\}$  构成一个“正相关子域”，连续七个“-”号的残差  $\{r_{9,0}, r_{10,0}, \dots, r_{15,0}\}$  组成一个“负相关子域”；第 2 进展年连续五个“-”号的残差  $\{r_{6,2}, r_{7,2}, \dots, r_{10,2}\}$  组成一个“负相关子域”，连续五个“+”号的残差  $\{r_{11,2}, r_{12,2}, \dots, r_{17,2}\}$  构

成一个“正相关子域”；第 5 进展年的情况稍有不同，因为“-”号连贯次数（4 次）最多的残差子域有两个，所以加上“+”号的残差子域，共有三个残差子域，分别是  $\{r_{0,5}, r_{1,5}, r_{2,5}, r_{3,5}\}$ 、 $\{r_{13,5}, r_{14,5}, r_{15,5}, r_{16,5}\}$  和  $\{r_{4,5}, r_{5,5}, \dots, r_{9,5}\}$ ；将以上 7 个“相关残差子域”合并成一个大区域——残差相关区域，然后将“残差相关区域”之外的区域定义为“残差独立区域”。

区域划分完成后，接着“分而抽之”。具体而言，在抽取 Bootstrap 残差  $r_{i,j}^*$  时，并不是按传统方法，一次从整个残差三角形中抽得的，而是从  $r_{i,j}$  所对应的区域中分别有放回地抽取的。即：“正相关子域”中的残差，都是从对应“正相关子域”中有放回抽样获得；“负相关子域”中的残差都是从对应“负相关子域”中有放回抽样获得；其余“残差独立区域”中的每一个残差都是从对应“残差独立区域”中有放回抽样获得。

按照上述改进方法，最终得到两阶段分区域 Bootstrap 残差三角形：

$$\{r_{i,j}^* : 0 \leq i + j \leq J; 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}$$

剩余后续步骤与第二节一致。

### 3.3 实证结果

本节以上文 Verrall 和 Wüthrich（2012）的数据为基础，首先给出 ODP 模型参数的估计值和未决赔款准备金的估计值，然后利用本文考虑残差相关性提出的两阶段分区域 Bootstrap 方法获到未决赔款的预测分布，并将结果与传统的 Bootstrap 方法进行比较，从而对残差相关引起的准备金风险波动进行分析<sup>①</sup>。

#### 3.3.1 ODP 模型参数估计结果

我们首先利用 R 软件中的广义线性模型估计函数 glm，得到了式（3.3）中  $\alpha_i$  和  $\beta_j$  的极大似然估计  $\hat{\alpha}_i$  和  $\hat{\beta}_j$ ，然后根据式（3.4）得到参数  $\mu_i$ 、 $\gamma_j$  的估计  $\hat{\mu}_i$  和  $\hat{\gamma}_j$ ，根据式（3.7）得到散布参数  $\phi_j$  的估计  $\hat{\phi}_j$ 。表 3.1 展示了事故年水平估计值  $\hat{\mu}_i$ （单位：10000），进展年水平估计值  $\hat{\gamma}_j$ ，散布参数估计值  $\hat{\phi}_j$ ，以及各事故年准备金估计  $\hat{R}_i$ （单位：10000）的结果，将各个事故年的准备金估计  $\hat{R}_i$  加总，就得到总的未决赔款准备金估计  $R = 1463076$ 。

<sup>①</sup> 为了进一步探讨残差相关的普遍性，笔者在完成 Verrall 和 Wüthrich 数据的分析后，还研究了其他数据样本，包括来自 England and Verrall（1999）、Wüthrich 等（2009）、Robert（2013）中的数据集。笔者发现，如果赔款三角形数据规模较小（如 England and verall（1999）、Wüthrich 等（2009）均是 10\*10 赔款三角形），就不容易发现残差之间的相关性，而如果数据量较多，例如 Robert（2013）的 17\*17 赔款三角形，通过残差符号三角形也可以发现与图 3.3 类似的残差相关性。

表 3.1 ODP 模型参数估计和未决赔款准备金估计

$i, j =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\mu}_i$	33.2	38.3	40.4	43.0	42.7	42.3	42.5	45.6	39.4	44.4	41.9
$\hat{\gamma}_j$	34.9%	16.6%	5.8%	4.4%	4.4%	4.2%	4.4%	4.3%	3.5%	3.1%	3.1%
$\hat{\phi}_j$	572	386	192	272	521	528	1587	519	751	1124	1386
$\hat{R}_i$	0.0	1.6	3.9	5.8	7.8	11.5	14.4	19.8	21.9	31.9	38.0
$i, j =$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$\hat{\mu}_i$	43.3	42.7	40.8	40.3	40.3	37.3	36.8	33.6	34.9	36.1	37.9
$\hat{\gamma}_j$	2.3%	1.9%	1.6%	1.2%	0.9%	0.7%	0.9%	0.5%	0.4%	0.5%	0.4%
$\hat{\phi}_j$	533	567	1037	535	882	79	809	108	144	80	80
$\hat{R}_i$	49.5	62.0	72.0	85.0	102.2	111.1	125.0	128.7	149.4	175.3	246.5

这里，参数估计值具有清晰的含义，比如， $\hat{\mu}_1 = 38.3 \times 10^4$  表示事故年 1 最终赔款的估计为 383000，而  $\hat{\gamma}_1 = 16.6\%$  则表示第 1 进展年的增量赔款在最终赔款中的占比为 16.6%， $\hat{\phi}_1 = 386$  则表示第 1 进展年增量赔款的方差是期望的 386 倍， $\hat{R}_1 = 1600$  指的是第 1 事故年的准备金为 1600。

### 3.3.2 两阶段分区域 Bootstrap 方法与传统 Bootstrap 方法的比较

根据本章第二节的理论和方法，利用两阶段分区域 Bootstrap 方法可以模拟得到各个事故年未决赔款。以  $i=13$  事故年为例，第 13 事故年在第 0-8 进展年的增量赔款是已知数据，第 9-21 进展年的增量赔款是待预测的数据，最终第 13 事故年模拟结果如图 3.8 所示。

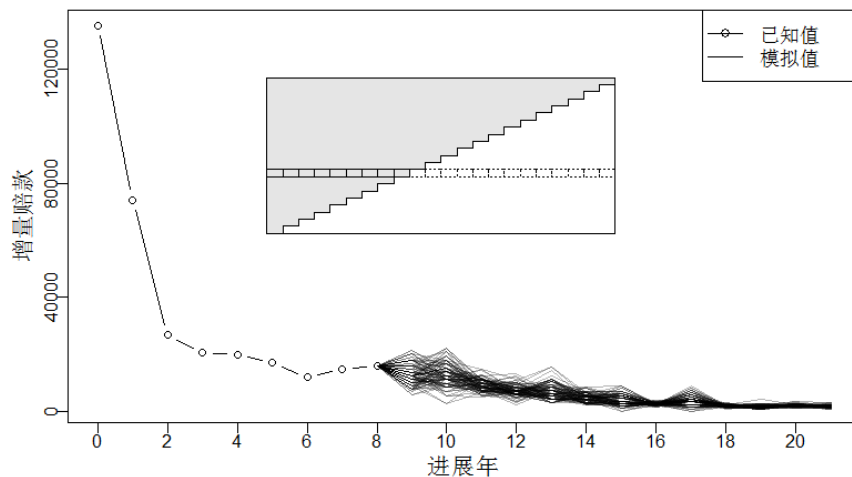


图 3.8 第 13 事故年在未来进展年的未决赔款模拟

图 3.8 展示了利用两阶段分区域 Bootstrap 方法模拟得到的第 13 事故年未决赔款结果，其中，第 0-8 进展年的赔款数据是已知的，不需要模拟，第 9-21 进展年增量赔款的模拟如图中折线所示。这里，模拟次数是 2000 次。对这些模拟的增量赔款进行初步统计特征分

析，可以得到图 3.9。

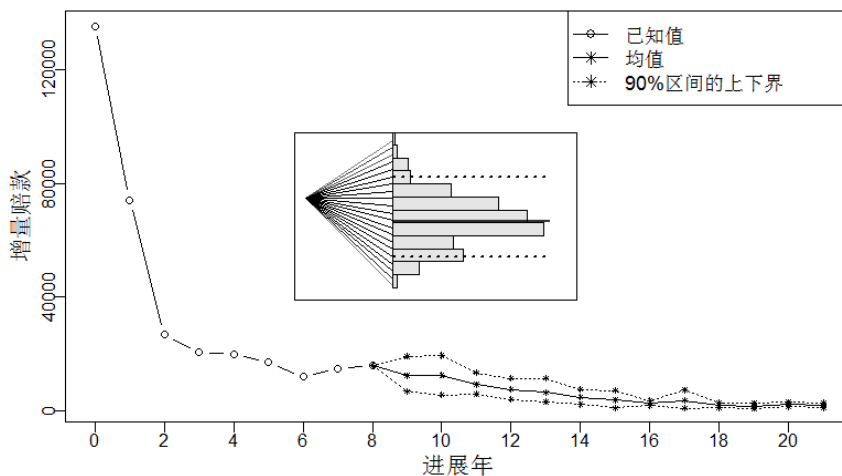


图 3.9 第 13 事故年在未来进展年未决赔款的统计特征

图 3.9 展示了第 13 事故年在第 9 进展年模拟的增量赔款的直方图，以及均值（实线）、5%分位数和 95%分位数（虚线）。该直方图可以看作是第 13 事故年在第 9 进展年增量赔款的预测分布。类似地，还可以得到第 10-21 进展年模拟的增量赔款的均值、5%分位数和 95%分位数，其中，5%分位数和 95%分位数构成了 90%置信区间的上下界。从图 3.9 中可明显看出，尾部进展年的增量赔款慢慢减少，其波动区间也不断缩小，也就意味着准备金风险的波动在逐渐减小。

将第 13 事故年在第 9-21 各进展年的模拟增量赔款加总，可以得到第 13 事故年未决赔款的模拟数据，如图 3.10 (a)；再将各个事故年模拟的未决赔款汇总，最终得到总未决赔款的模拟数据，如图 3.10 (b)。

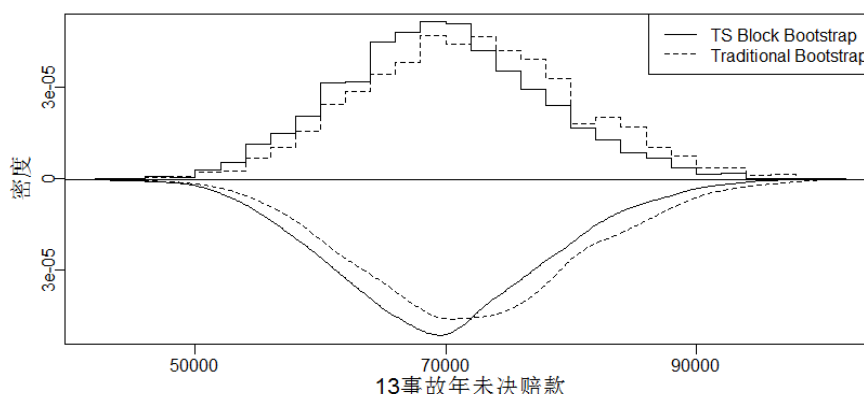


图 3.10 (a) 第 13 事故年未决赔款的直方图与核密度曲线

图 3.10 (a) 展示了利用两阶段分区域 Bootstrap 方法，得到的第 13 事故年未决赔款的直方图与核密度曲线（实线），利用传统 Bootstrap 方法得到直方图与核密度曲线（虚线）。



二者比较可以发现，传统 Bootstrap 的密度曲线较为平缓，并且有拖长的右尾，而两阶段分区域 Bootstrap 方法的核密度曲线比传统 Bootstrap 陡峭一些，并且左尾右尾对称，由此可以初步判定，两阶段分区域 Bootstrap 方法得到的未决赔款的波动性，相比传统 Bootstrap 方法要小，表示估计也更加趋近稳健。

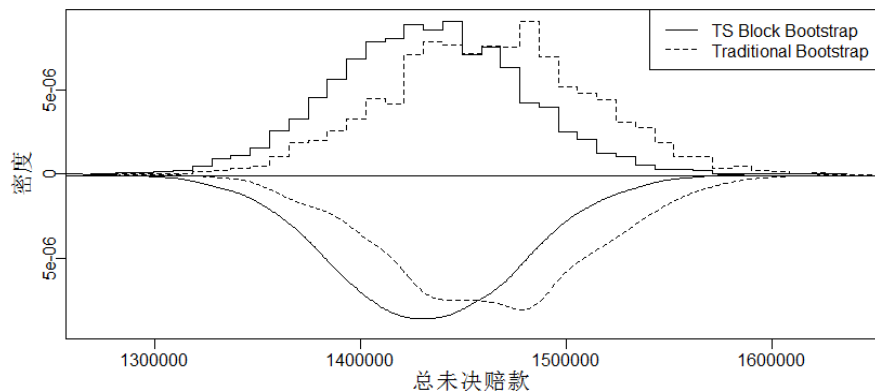


图 3.10 (b) 总未决赔款的直方图与核密度曲线

与图 3.10 (a) 类似，图 3.10 (b) 展示了两阶段分区域 Bootstrap 方法得到总未决赔款的直方图与核密度曲线（实线），传统 Bootstrap 方法得到的直方图与核密度曲线（虚线）。将两阶段分区域 Bootstrap 方法与传统 Bootstrap 方法的结果进行比较，可以得到与图 3.10 (a) 类似的结论，传统 Bootstrap 的密度曲线较为平缓，并且有拖长的右尾，而两阶段分区域 Bootstrap 方法的核密度曲线比传统 Bootstrap 陡峭一些，并且左尾右尾对称，由此也可以判定，传统 Bootstrap 方法得到的未决赔款的波动性较大，而两阶段分区域 Bootstrap 方法得到的未决赔款的波动性较小。从而，进一步验证了本文提出的方法可以更加准确地度量非寿险准备金风险。

表 3.2 未决赔款预测分布的统计特征

	事故年 $i = 6$		事故年 $i = 13$		事故年 $i = 20$		总计	
	M1	M2	M1	M2	M1	M2	M1	M2
均值	14441	14587	71908	69624	175243	168240	1462552	1432128
均方误差	2298	2259	8549	8135	13944	12228	48973	44977
标准系数	0.159	0.155	0.119	0.117	0.080	0.073	0.033	0.031
四分位距	3011	2986	11530	10906	18195	16525	64031	61664

注：M1 代指传统 Bootstrap 方法，M2 代指两阶段分区域 Bootstrap 方法；平均值、均方误差、四分位距单位均为 1。

以上几点观察结论需用数据结果进行确认。表 3.2 给出了事故年第 6、13 和 20 列未决赔款预测分布的统计特征，以及总未决赔款预测分布的统计特征，并将传统 Bootstrap 方法（用 M1 表示）和两阶段分区域 Bootstrap 方法（用 M2 表示）得到的结果进行了对比。在未决赔款的波动程度方面，在三种不同的风险度量方法下（均方误差，变异系数和四分位



距), 各个事故年的未决赔款和总的未决赔款结论都是一致的: 传统 Bootstrap 的波动程度均较大, 而两阶段分区域 Bootstrap 方法的波动程度较小, 估计更加稳健。这就定量验证了以上得到的几点观察结论。

### 3.4 本章小结

在准备金评估模型和准备金风险度量中应用 Bootstrap 方法, 要求残差必须满足独立性假设。本章在 ODP 模型基础上, 通过分析 Verall 和 Wüthrich (2012) 的真实赔款数据发现, 拟合模型后计算得到的残差可能并不独立。鉴于此, 我们利用统计中的游程检验, 识别出了不满足独立性假设的残差数据, 并利用多重假设检验的 FDR 控制过程, 对检验的误判概率进行了控制; 最后, 依据残差相关结构, 对残差三角形进行了区域划分, 并设计了一种两阶段分区域 Bootstrap 方法对具有相关结构的残差进行重抽样。

实证结果发现: 真实赔款数据并不总是满足 ODP 模型的独立性假设, 所得残差之间可能具有相关结构, 不对其进行检验就贸然使用 Bootstrap 方法, 所得结论就可能存在偏差; 当残差不满足独立性假设, 具有相关结构时, 传统 Bootstrap 方法得到的未决赔款预测分布密度曲线有拖长的右尾, 出现异常未决赔款的可能性较大, 而两阶段分区域 Bootstrap 方法可以有效消除残差相关性的影响, 得到的未决赔款的波动性较小, 其估计也较为稳健, 从而准备金风险的度量也更为准确。

需要指出的是, 残差相关的实质是赔付数据之间具有依赖关系。事实上, 相对于 ODP 模型的独立性假设, 赔付数据之间具有依赖关系可能更为常见。不少研究文献均在放松独立性假设基础上, 通过建模来处理赔付数据的相关性。但是, 我们尚未发现有精算文献关注 Bootstrap 应用中的残差相关性问题, 这可能有两个原因: 首先, 文献里使用的赔款三角形数据规模较小, 通常是  $10 \times 10$  左右的三角形数据, 数据量少就不容易发现残差之间的相关性; 其次, 不单是精算学者, 即使是应用统计学者, 在使用统计方法时, 也常常忽视统计方法的假设条件。因此在现有文献基础上, 本章可能的理论贡献是: 重新审视了 Bootstrap 在 ODP 模型中的应用条件, 利用残差符号上三角形的数据可视化的方式, 清楚地展示了残差的相关结构, 提出了残差不满足独立性假设的问题; 利用统计中的游程检验, 识别出了不满足独立性假设的残差数据, 并利用多重假设检验的 FDR 控制过程, 对检验的误判概率进行了控制; 考虑到有少数事故年和进展年的残差具有相关性, 本章设计了一种两阶段分区域 Bootstrap 方法对具有相关结构的残差抽样, 以期对传统的 Bootstrap 方法进行改进。

本章的研究是 Bootstrap 在非寿险准备金评估中应用的有益探索。Bootstrap 方法在非

寿险准备金评估中应用非常广泛，精算人员常常用它来分析未决赔款的预测均方误差或者预测分布，从而为准备金风险度量乃至偿付能力资本要求监管提供依据。对于非寿险公司的精算人员来说，本研究从另一个视角审视了 **Bootstrap** 方法，从而帮助精算人员更加审慎地使用 **Bootstrap** 方法，避免由于忽视残差独立性假设而造成的估计偏差。

## 第 4 章 赔款相关条件下非寿险准备金风险度量研究

泊松模型是应用广泛的准备金评估模型之一，该模型及其扩展过离散泊松模型，均假设不同事故年、进展年的增量赔款数据相互独立，在独立性假设下，参数估计和准备金估计较为容易。但问题也随之而来：赔款数据是否一定满足独立性假设？已有研究注重模型构建与参数估计，疏于对模型假设进行检验，从而在一定程度上忽视了赔款数据相关性问题。如果赔款相关，却仍假设其独立，那么所得估计值将会有偏，准备金风险的度量也不精确。因此，如何检验增量赔款的独立性假设，以及当假设不成立时，如何对独立泊松模型进行改进等问题就自然进入我们的研究视野。

### 4.1 ODP 模型与赔款数据相关性问题

#### 4.1.1 ODP 模型：一种新的定义方式

首先定义一些常用的记号。将事故年记为  $i \in \{0, 1, \dots, I\}$ ，进展年记为  $j \in \{0, 1, \dots, J\}$ ，将第  $i$  事故年发生的保险事故在第  $j$  进展年的增量赔款记为  $X_{i,j}$ 。另外，不失一般性，假设  $I = J$ 。

如图 4.1 所示，在  $I$  年末，也就是准备金评估日历年，已观测到的赔款数据组成上三角形，有待预测的未决赔款数据构成下三角形。

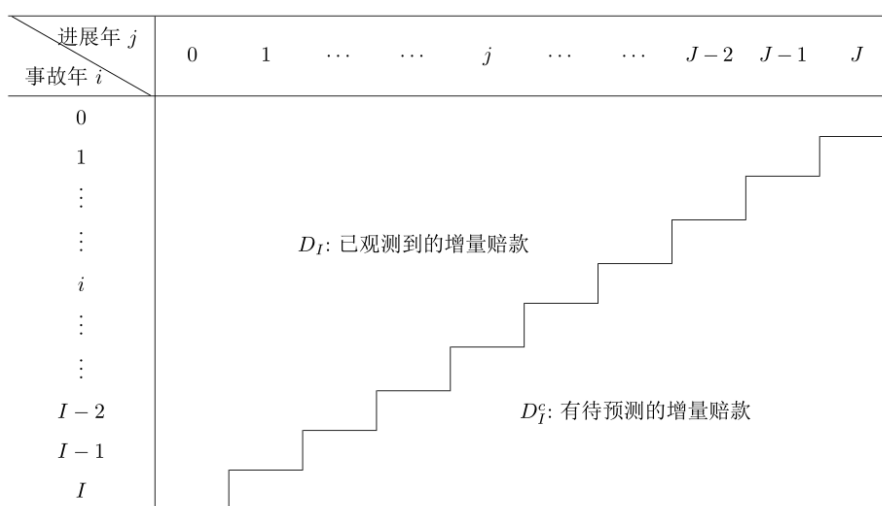


图 4.1 增量赔款数据的结构

将上三角形增量赔款数据定义为  $D_I = \{X_{i,j} : 0 \leq i + j \leq J; 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}$ ，那么下三角形增量赔款数据可视为上述集合的补集，即  $D_I^c = \{X_{i,j} : i + j \geq I + 1; 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}$ 。非寿险准备金评估就是在已知数据  $D_I$  的基础上，建立一个概率统计模型对  $D_I^c$  进行预测， $D_I^c$  中

所有增量赔款之和即为非寿险准备金。

首先考虑最简单的模型：泊松模型。泊松模型假定增量赔款  $X_{i,j}$  相互独立，且服从泊松分布：

$$X_{i,j} \sim Po(m_{i,j}) \quad (4.1)$$

这里， $Po$  代表泊松分布， $m_{i,j}$  是泊松分布的均值。依据广义线性模型的对数连接函数，对均值  $m_{i,j}$  取对数，并表示为如下线性关系：

$$\log(m_{i,j}) = \mu + \alpha_i + \beta_j \quad (4.2)$$

其中， $\alpha_i$  和  $\beta_j$  表示影响  $X_{i,j}$  均值  $m_{i,j}$  的事故年效应和进展年效应，均为待估参数。以上模型求解要求具有适当的约束条件，从而得到可识别的参数，这里采用顶点约束  $\alpha_0 = 0$ ， $\beta_0 = 0$ 。这样，截距项  $\mu$  的含义就比较清楚，它表示增量赔款  $X_{0,0}$  期望的对数。

泊松模型式 (4.1) 假定增量赔款的方差与均值相等，这是非常严格的假设。精算实务中，赔款数据往往具有过离散性，方差常常大于均值。为此，学者们在泊松模型基础上进一步发展了过离散泊松模型，以描述增量赔款的过离散性。在上一章中，我们按照如下方式定义 ODP 模型，即假设增量赔款  $X_{i,j}$  相互独立，且服从以下分布：

$$\frac{X_{i,j}}{\phi} \sim Po\left(\frac{m_{i,j}}{\phi}\right)$$

这里， $Po$  代表泊松分布， $m_{i,j}$  是泊松分布的均值， $\phi$  表示散布参数。简单推导可得增量赔款  $X_{i,j}$  的期望和方差分别为：

$$E(X_{i,j}) = m_{i,j} \quad \text{Var}(X_{i,j}) = \phi \times m_{i,j}$$

可见，当  $\phi$  大于 1 时，增量赔款的方差会大于均值，这就符合增量赔款数据的过离散特点。在该定义下，需要估计的参数有截距项  $\mu$ 、事故年效应  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ 、进展年效应  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l\}$  以及散布参数  $\phi$ 。

但在本章中，为方便对 ODP 模型进行改进，我们采用另一种方式定义 ODP 模型。与泊松模型一样，仍然假定增量赔款  $X_{i,j}$  相互独立，而且服从均值为  $m_{i,j}$  的泊松分布。但与

泊松模型不同的是，对均值  $m_{i,j}$  作出如下假设：

$$\log(m_{i,j}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} \quad (4.3)$$

其中， $\mu$  仍是截距项， $\alpha_i$  和  $\beta_j$  的含义也并未改变，分别表示影响  $X_{i,j}$  均值  $m_{i,j}$  的事故年效应和进展年效应；增加的一项  $\gamma_{i,j}$  是随机效应，一般假定其相互独立，并且服从均值为 0，方差为  $\sigma_\gamma^2$  的正态分布：

$$\gamma_{i,j} \sim N(0, \sigma_\gamma^2) \quad (4.4)$$

加入独立随机效应  $\gamma_{i,j}$  后，增量赔款  $X_{i,j}$  均值的对数  $\log(m_{i,j})$  不再是固定的量，而是服从正态分布，均值为  $\mu + \alpha_i + \beta_j$ ，方差为  $\sigma_\gamma^2$  的随机变量，这就会间接增加  $X_{i,j}$  的波动性，从而体现增量赔款的过离散特征。这时，模型未知参数有截距项  $\mu$ 、事故年效应  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_I\}$ 、进展年效应  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_I\}$  以及方差参数  $\sigma_\gamma^2$ 。

#### 4.1.2 赔款数据相关性的探索性分析

过离散泊松模型对泊松模型进行改进，通过引入独立随机效应  $\gamma_{i,j}$ ，使模型体现增量赔款的过离散特征。但是，无论是泊松模型还是过离散泊松模型，它们都假定上三角形增量赔款是相互独立的，而在精算实务中，增量赔款常常具有相关性，特别是相邻事故年、进展年的增量赔款数据，往往呈现正相关性。

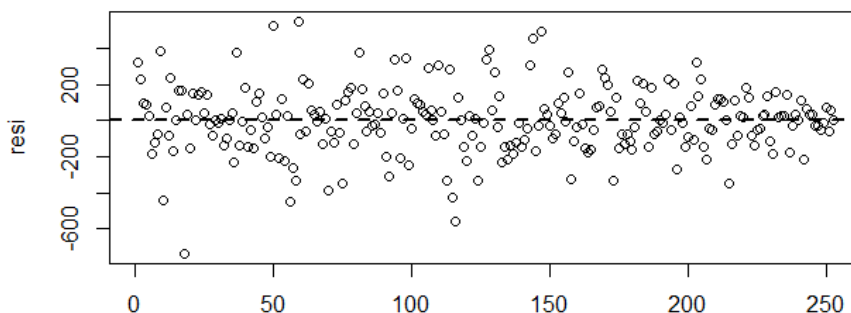


图 4.2 过离散泊松模型拟合的残差

借助一个实际案例对增量赔款的相关性进行探索性分析。本案例基于某非寿险公司一组真实增量赔款数据（Verrall 和 Wüthrich，2012），该数据共有 22 个事故年和 22 个进展年，因此上三角形共有 253 个数据。在这组增量赔款数据基础上，利用贝叶斯方法对 ODP 模型进行拟合，得到上三角形数据的拟合值，真实值减去拟合值就得到 ODP 模型的残差，

全部 253 个残差如图 4.2 所示。

通过残差分析技术对增量赔款的独立性假设进行讨论。由图 4.2 可以看出，这些残差主要集中在  $(-400, 400)$  区间内，仅有少数的残差落在区间之外；图中的深色虚线代表残差的均值 0.1124，与 0 接近。可见，模型拟合残差以零为中心在一定区域内随机波动，没有特殊的规律可循。

然而，如果把这些残差有序地排列在上三角形中，则可以观察到一些有趣的现象。如图 4.3 所示，在事故年、进展年和残差构成的三维立体空间中，向上实心点表示正的残差，向下空心点表示负的残差。增量赔款的独立性意味着这些残差也是独立的，也就是说正负残差应该是完全随机出现的，但仔细观察图 4.3 可以发现，位于残差三角形左上角的残差均为正，这似乎与残差独立性假设相悖。不过，由于这些立体散点比较密集，我们不易观察到其他明显规律。

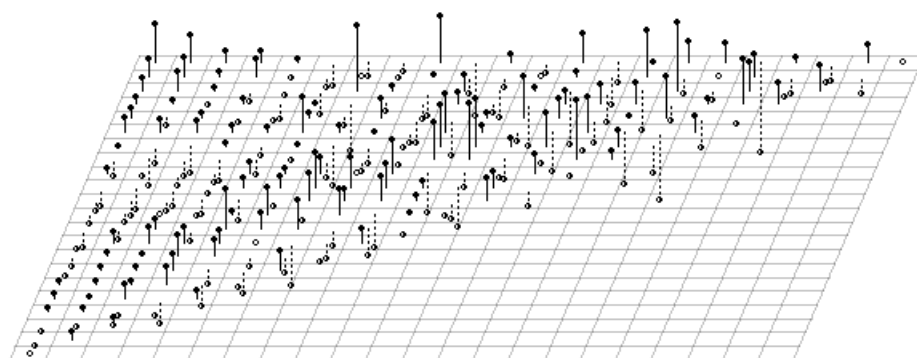


图 4.3 过离散泊松模型的残差立体图

为更好地观察这个残差三角形，我们采取另一种展示方式：把其中正的残差记为‘+’，负的残差记为‘-’，然后把这些残差符号在一个平面三角形中表示出来，构成残差符号三角形，如图 4.4 所示。在增量赔款独立性假设下，残差应是以零为中心上下波动的随机变量，这意味着，‘+’和‘-’的出现应是完全随机的，不应有某种特殊的规律。但在图 4.4 中，却有相同符号残差聚在一起的情况出现，构成了很多残差块，这里标出了五个残差块。有些残差块内含有的残差个数非常多，例如，①中有 15 个“+”的残差，②中有 22 个“-”的残差，③中有 20 个“+”的残差。相同符号残差块的出现，表明残差不是完全随机的。我们据此怀疑增量赔款的独立性假设，相邻事故年、进展年的增量赔款数据可能具有正相关性。

通过图形观察，我们对增量赔款的独立性假设提出了质疑。事实上，除了图示分析，还可以利用假设检验的方法对独立性进行统计检验。我们把事故年和进展年当作空间位置

的二维坐标,残差当作某一空间位置上的测量值,那么图 4.3 就相当于一张残差“立体地图”,图 4.4 就是一幅残差“平面地图”。检验残差的独立性假设,就相当于考察残差“地图”是否具有空间相关性。在空间统计学里,一般采用 Moran's I 系数来衡量空间相关性 (Li 和 Calder, 2007), Moran's I 大于 0, 表示正相关, Moran's I 小于 0, 表示负相关。在本例中,计算得到的 Moran's I 系数为 0.026, p 值为  $1.13 \times 10^{-8}$ 。因此,残差三角形呈现显著的正相关<sup>①</sup>,表明相邻事故年、进展年的增量赔款具有正相关性。这就从定量分析角度佐证了来自图 4.3 和图 4.4 的观察。

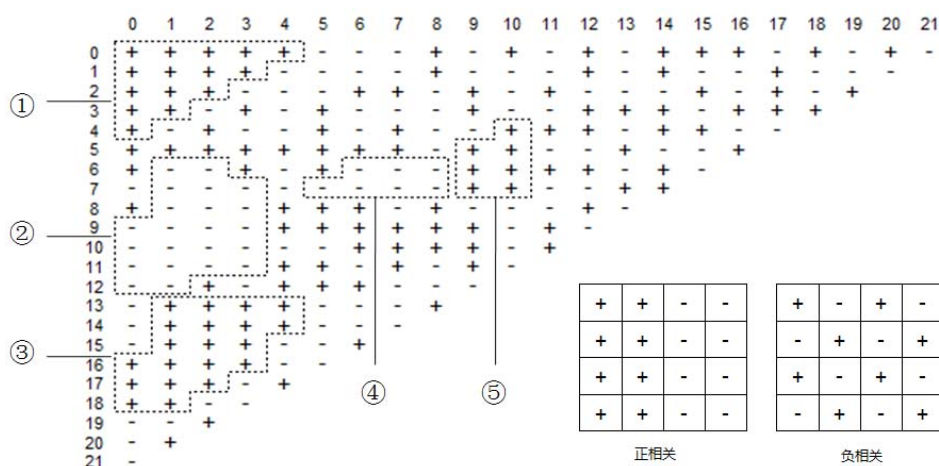


图 4.4 过离散泊松模型的残差符号三角形

### 4.1.3 考虑相关性的条件自回归泊松模型

上一小节的分析表明,增量赔款数据并不是相互独立的,而是具有正相关性。为在模型中考虑增量赔款的相关性,对过离散泊松模型进行如下改进:

$$\log(m_{i,j}) = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \phi_{i,j} \quad (4.5)$$

其中,  $\mu$  是截距项,  $\alpha_i$ 、 $\beta_j$  和  $\gamma_{i,j}$  的含义与式 (4.4) 相同,分别表示影响增量赔款均值  $m_{i,j}$  的事故年效应、进展年效应以及独立随机效应。添加的一项  $\phi_{i,j}$  是相关随机效应,不同事故年、进展年的随机效应  $\phi_{i,j}$  构成一个随机效应向量  $\phi = \{\phi_{i,j} : 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}$ 。

我们采用条件自回归模型 (Conditional autoregression model, CAR) 对相关随机效应向量  $\phi$  进行建模。条件自回归模型最早由 Besag (1974) 提出。在条件自回归模型中,我们间接分析  $\phi$  中每个随机效应  $\phi_{i,j}$  的条件分布,然后通过  $\phi_{i,j}$  的条件分布确定  $\phi$  的联合分布。

<sup>①</sup> 本文利用统计软件 R 包 ape 中的 Moran.I () 函数来计算 Moran's I 以及 p 值。

这里假定，在  $\phi_{i,j}$  以外的随机效应给定的条件下， $\phi_{i,j}$  的条件分布只与相邻的随机效应有关，即：

$$p(\phi_{i,j} | -) = p(\phi_{i,j} | \phi_{i',j'}, \phi_{i',j'} \in \partial_{i,j}) \quad (4.7)$$

其中， $p(\cdot | \cdot)$  表示条件分布函数，“-”表示  $\phi_{i,j}$  以外随机效应的集合， $\partial_{i,j}$  表示与  $\phi_{i,j}$  相邻的随机效应集合，这些相邻随机效应与  $\phi_{i,j}$  处在同一事故年或同一进展年。图 4.5 画出了当  $\phi_{i,j}$  有四个相邻随机效应时的示意图，此时， $\partial_{i,j} = \{\phi_{i-1,j}, \phi_{i+1,j}, \phi_{i,j-1}, \phi_{i,j+1}\}$ ，从下标符号可以看出，这些相邻随机效应或者与  $\phi_{i,j}$  处在同一进展年（如  $\phi_{i-1,j}$  和  $\phi_{i+1,j}$ ），或者与  $\phi_{i,j}$  处在同一事故年（如  $\phi_{i,j-1}$  和  $\phi_{i,j+1}$ ）。

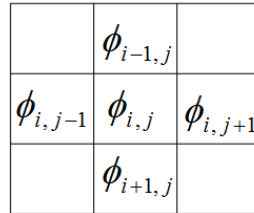


图 4.5  $\phi_{i,j}$  有四个相邻随机效应

式 (4.7) 表明，随机效应  $\phi_{i,j}$  的条件分布  $p(\phi_{i,j} | -)$  只与相邻的随机效应  $\partial_{i,j}$  有关，一般假设条件分布  $p(\cdot | \cdot)$  为正态分布，即：

$$\phi_{i,j} | \partial_{i,j} \sim N(\bar{\phi}_{i,j}, \sigma_{\phi_{i,j}}^2) \quad (4.8)$$

这里，条件分布的期望  $\bar{\phi}_{i,j}$  和方差  $\sigma_{\phi_{i,j}}^2$  由相邻随机效应决定：

$$\bar{\phi}_{i,j} = \frac{\sum_{\phi_{i',j'} \in \partial_{i,j}} \phi_{i',j'}}{n_{i,j}} \quad \sigma_{\phi_{i,j}}^2 = \frac{\sigma_{\phi}^2}{n_{i,j}} \quad (4.9)$$

其中， $n_{i,j}$  表示与  $\phi_{i,j}$  相邻的随机效应的数目， $\sigma_{\phi}^2$  是一个未知参数。式 (4.9) 表明， $\phi_{i,j}$  的条件期望  $\bar{\phi}_{i,j}$  是相邻随机效应的平均值，条件方差  $\sigma_{\phi_{i,j}}^2$  与相邻随机效应的数目呈反比关系。以图 4.5 为例，当  $\phi_{i,j}$  有四个随机效应与其相邻时，条件期望  $\bar{\phi}_{i,j} = (\phi_{i-1,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} + \phi_{i,j+1})/4$ ，条件方差  $\sigma_{\phi_{i,j}}^2 = \sigma_{\phi}^2/4$ 。



以上我们讨论了  $\phi_{i,j}$  的条件分布, 根据 Hammersley-Clifford 定理 (Besag,1974) 和 Brook 引理 (Brook,1964), 当每个随机效应  $\phi_{i,j}$  的条件分布式 (4.8) 给定时, 也就唯一地确定了  $\phi$  的联合分布:

$$p(\phi_{0,0}, \dots, \phi_{I,I}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_\phi^2} \sum_{(i,j_1) \neq (i_2,j_2)} (\phi_{i,j_1} - \phi_{i_2,j_2})^2 I(\phi_{i,j_1}, \phi_{i_2,j_2}) \right\} \quad (4.10)$$

其中,  $I(\phi_{i,j_1}, \phi_{i_2,j_2})$  代表示性函数, 当随机效应  $\phi_{i,j_1}$  和  $\phi_{i_2,j_2}$  相邻时,  $I(\phi_{i,j_1}, \phi_{i_2,j_2}) = 1$ , 当  $\phi_{i,j_1}$  和  $\phi_{i_2,j_2}$  不相邻时,  $I(\phi_{i,j_1}, \phi_{i_2,j_2}) = 0$ 。作为  $\phi$  的联合分布密度函数, 如果式 (4.10) 中所有的随机效应  $\phi_{i,j}$  都增加一个常数, 联合分布密度取值不会发生变化。这意味着, 随机效应向量  $\phi$  没有一个“中心”, 因此一般对随机效应  $\phi$  添加内部限制条件  $\sum \phi_{i,j} = 0$ 。添加限制条件的自回归模型又被称为内在自回归模型 (Intrinsically autoregressive model, IAR) (Besag,1995)。

## 4.2 条件自回归泊松模型的贝叶斯估计

以上我们建立了条件自回归泊松模型, 该模型不仅体现增量赔款的过离散特征, 还能够描述增量赔款的相关性, 尤其是相邻事故年、进展年增量赔款的正相关性。但随着模型结构变得复杂, 模型参数估计也愈加困难。在条件自回归泊松模型中, 除截距项、事故年效应、进展年效应三组参数外, 另有比赔款数据还多的随机效应需要估计。在这种情况下, 极大似然估计方法会产生过拟合问题。为避免过拟合问题, 在数据量有限背景下, 可利用贝叶斯方法, 结合先验信息和上三角赔款数据对模型参数进行估计。下面首先从设定参数先验分布进行讨论。

### 4.2.1 参数先验分布设定

对于截距项  $\mu$ , 沿用处理截距项的一般做法, 采用扁平先验:

$$\mu \sim dflat()$$

对于事故年效应  $\alpha_i$  和进展年效应  $\beta_j$ , 采用正态先验分布假设:

$$\alpha_i \sim N(0, \sigma_\alpha^2) \quad \beta_j \sim N(0, \sigma_\beta^2) \quad i, j = 1, \dots, I$$

一般,  $\sigma_\alpha^2$  和  $\sigma_\beta^2$  取较大的值, 意味着  $\alpha_i$  和  $\beta_j$  近似服从无信息先验分布。

对于随机效应的方差参数  $\sigma_\gamma^2$  和  $\sigma_\phi^2$ , 一般采用共轭先验分布, 即逆伽马分布:

$$\sigma_\gamma^2 \sim IG(a_\gamma, b_\gamma) \quad \sigma_\phi^2 \sim IG(a_\phi, b_\phi)$$

这里， $IG(a, b)$ 表示逆伽马分布的概率密度函数  $f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-(a+1)} e^{-b/x}$ 。一般来说，随机效应的波动程度较小，所以超先验参数  $a_\gamma$ 、 $b_\gamma$ 、 $a_\phi$  和  $b_\phi$  的取值使  $\sigma_\gamma^2$  和  $\sigma_\phi^2$  在小范围内波动即可。

#### 4.2.2 参数后验估计、准备金估计与风险度量

条件自回归泊松模型参数较多，参数联合后验分布非常复杂。本文采用 Gibbs 抽样技术，模拟得到参数后验分布样本，然后通过样本特征值进行参数估计。为利用 Gibbs 抽样对模型进行估计，首先推导参数的条件后验分布。模型未知参数有：

$$\begin{aligned} \mu; \alpha &= \{\alpha_i : 1 \leq i \leq I\}; \quad \beta = \{\beta_j : 1 \leq j \leq I\}; \\ \phi &= \{\phi_{i,j} : 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}; \\ \gamma &= \{\gamma_{i,j} : 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}; \quad \sigma_\gamma^2; \quad \sigma_\phi^2 \end{aligned}$$

将下三角形未决增量赔款  $D_i^c = \{X_{i,j} : i+j \geq I+1; 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I\}$  也作为未知参数，因此全部未知参数有：

$$\{\mu, \alpha, \beta, \phi, \gamma, \sigma_\gamma^2, \sigma_\phi^2, D_i^c\}$$

各参数条件后验分布如下：

$$\begin{aligned} f(\mu | -) &\propto \prod_{1 \leq i \leq I} \prod_{1 \leq j \leq I} Po(X_{i,j} | e^{\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \phi_{i,j}}) \\ f(\alpha_i | -) &\propto \prod_{1 \leq i \leq I} \prod_{1 \leq j \leq I} Po(X_{i,j} | e^{\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \phi_{i,j}}) \times N(\alpha_i | 0, \sigma_\alpha^2) \quad 1 \leq i \leq I \\ f(\beta_j | -) &\propto \prod_{1 \leq i \leq I} \prod_{1 \leq j \leq I} Po(X_{i,j} | e^{\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \phi_{i,j}}) \times N(\beta_j | 0, \sigma_\beta^2) \quad 1 \leq j \leq I \\ f(\gamma_{i,j} | -) &\propto Po(X_{i,j} | e^{\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \phi_{i,j}}) \times N(\gamma_{i,j} | 0, \sigma_\gamma^2) \quad 1 \leq i \leq I \quad 1 \leq j \leq I \\ f(\phi_{i,j} | -) &\propto Po(X_{i,j} | e^{\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \phi_{i,j}}) \times N(\phi_{i,j} | \bar{\phi}_{i,j}, \sigma_{\phi_{i,j}}^2) \quad 1 \leq i \leq I \quad 1 \leq j \leq I \\ f(\sigma_\gamma^2 | -) &\propto \prod_{1 \leq i \leq I} \prod_{1 \leq j \leq I} N(\gamma_{i,j} | 0, \sigma_\gamma^2) \times IG(\sigma_\gamma^2 | a_\gamma, b_\gamma) \\ f(\sigma_\phi^2 | -) &\propto p(\phi_{0,0}, \dots, \phi_{I,I}) \times IG(\sigma_\phi^2 | a_\phi, b_\phi) \\ f(X_{i,j} | -) &\propto Po(X_{i,j} | e^{\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{i,j} + \phi_{i,j}}) \quad i+j \geq I+1; 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I \end{aligned}$$

这里， $f(\bullet|-)$ 表示在上三角增量赔款数据与其他参数（用“-”表示）已知条件下，某目标参数（用“•”表示）的后验分布。Gibbs 抽样的具体过程是，首先设定参数初始值：

$$\theta^{(0)} = \{\mu^{(0)}, \alpha^{(0)}, \beta^{(0)}, \phi^{(0)}, \gamma^{(0)}, \sigma_\gamma^{2(0)}, \sigma_\phi^{2(0)}, D_I^{c(0)}\}$$

然后在  $\theta^{(0)}$  的基础上，按照条件后验分布依次对参数进行更新，得到新的参数模拟值：

$$\theta^{(1)} = \{\mu^{(1)}, \alpha^{(1)}, \beta^{(1)}, \phi^{(1)}, \gamma^{(1)}, \sigma_\gamma^{2(1)}, \sigma_\phi^{2(1)}, D_I^{c(1)}\}$$

不断重复如上的更新过程  $T$  次，就可得到一个容量为  $T$  的后验分布样本  $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(T)}\}$ 。作为其中的组成部分，对未决增量赔款后验样本  $\{D_I^{c(1)}, D_I^{c(2)}, \dots, D_I^{c(T)}\}$  进行分析，可以获得未决赔款预测分布和未决赔款准备金。利用直方图或核密度估计方法，能得到未决赔款的预测分布，对未决赔款的样本取均值，可得到未决增量赔款的均值估计：

$$\hat{X}_{i,j} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_{i,j}^{(t)} \quad i+j \geq I+1; 1 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I$$

各事故年未决赔款的均值估计：

$$\hat{R}_i = \sum_{j=I+1-i}^I \hat{X}_{i,j} \quad 0 \leq i \leq I$$

以及总未决赔款的均值估计也即准备金估计：

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i$$

### 4.2.3 基于 DIC 的模型评价

本文共涉及三个模型：简单泊松模型、过离散泊松模型和条件自回归泊松模型。其中，条件自回归泊松模型最为复杂，该模型不仅反映增量赔款的过离散特征，还体现相邻事故年、进展年增量赔款的正相关性。一个自然的问题是，最复杂的模型是否如我们所愿，既能很好地拟合已有赔款数据，又可精确地预测未决赔款呢？要回答这个问题，需要进行模型评价。

在利用贝叶斯方法对模型进行估计时，一般采用偏差信息准则（Deviance Information Criterion, DIC）对模型进行科学评价（Spiegelhalter 等，2002）。一般来说，结构复杂、参数越多的模型，对现有数据拟合常常较好，但预测精度却不尽人意。DIC 准则一方面考虑模型的拟合优度，同时还兼顾模型的预测精度。其计算方法如下：

$$DIC = \bar{D}(\theta) + p_D$$

$$p_D = \bar{D}(\theta) - D(\bar{\theta})$$

其中,  $\bar{D}(\theta)$  表示模型拟合偏差的后验均值,  $D(\bar{\theta})$  表示模型拟合偏差在参数后验均值  $\bar{\theta}$  处的取值, 偏差越小表示模型拟合越好;  $\bar{D}(\theta)$  与  $D(\bar{\theta})$  之差是模型中有效参数的个数, 用  $p_D$  表示,  $p_D$  越小表示模型越简洁, 预测精度越高。DIC 是  $\bar{D}(\theta)$  与  $p_D$  的加和, 表示 DIC 兼顾模型拟合优度和预测精度两方面。DIC 越小, 表示模型越优。一般来说, 若两模型的 DIC 差值大于 5, 那么认为其中一个模型显著优于另外一个模型。我们可以利用 DIC 对以上三个模型进行评价和比较。

## 4.3 实证研究

### 4.3.1 数据来源

本文使用的数据来源于 Verrall 和 Wüthrich (2012), 为保险公司真实增量赔款数据。该增量赔款三角形共有 22 个事故年和 22 个进展年, 即  $I = 21$ , 限于篇幅这里不再用表格展示原始数据。作者已将其以文本文件的形式置于网站上<sup>①</sup>, 有兴趣的读者可以下载使用。不过, 我们可以通过立体图的方式将这些数据展示出来。在图 4.6 中, 水平横轴表示进展年, 水平纵轴表示事故年, 每个小直方体的高度代表增量赔款的大小。传统的泊松模型假定这些增量赔款相互独立, 但图 4.6 中邻近直方体的高度比较相似, 这可能意味着相邻事故年、进展年的增量赔款具有某种相关性。

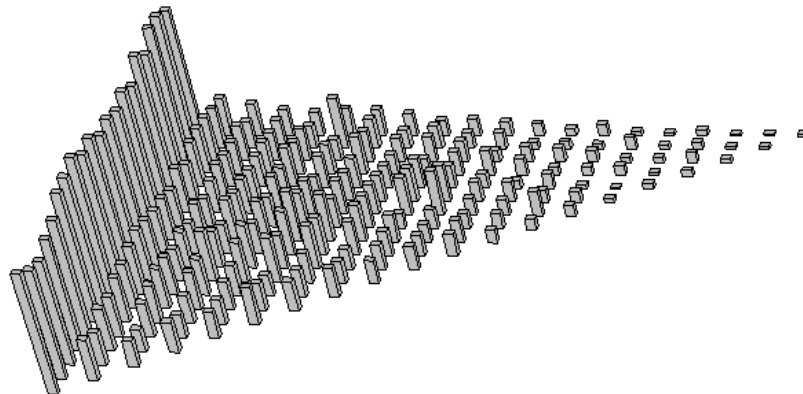


图 4.6 增量赔款三角形的立体图

本章第二部分以 Verrall 和 Wüthrich (2012) 的数据为例, 通过残差分析技术, 对增量赔款的独立性假设进行了深入讨论, 发现增量赔款数据可能具有相关性, 特别是相邻事

<sup>①</sup>网址: <http://gaolei786.github.io/code/car/>。增量赔款数据、本文编程的 R 代码、WinBUGS 程序代码等内容, 均可以从该网址下载。当然, 也欢迎来函索取。

故年、进展年增量赔款具有正相关性。为此，本文在过离散模型基础上，添加了相关随机效应，并采用条件自回归模型对相关随机效应进行建模，从而构建了描述赔款数据相关性的条件自回归泊松模型。

### 4.3.2 条件自回归模型的贝叶斯估计

本文采用贝叶斯方法，结合先验信息和赔款数据对条件自回归泊松模型进行估计，特别是利用 Gibbs 抽样对参数后验分布进行了随机模拟<sup>①</sup>，最终得到了准备金估计值和未决赔款的预测分布，并对准备金风险进行度量。

#### (1) 参数先验分布的设定和 Gibbs 抽样初始值的选取

首先设定参数的先验分布。事故年效应  $\alpha_i$  先验分布的超参数  $\sigma_\alpha^2 = 100000$ ，进展年效应  $\beta_j$  先验分布的超参数  $\sigma_\beta^2 = 100000$ ，两个超参数取值较大，意味着事故年效应  $\alpha_i$ 、进展年效应  $\beta_j$  近似服从无信息先验分布。随机效应方差  $\sigma_\gamma^2$  和  $\sigma_\phi^2$  先验分布的两个超参数  $a_\gamma = 1000000$ ， $b_\gamma = 1000$ ，这表明随机效应的波动将会被限制在较小的范围之内。

然后设定参数 Gibbs 抽样的初始值如下： $\mu^{(0)} = 0$ ； $\alpha_i^{(0)} = 0, 1 \leq i \leq I$ ； $\beta_j^{(0)} = 0, 1 \leq j \leq I$ ； $\phi_{i,j}^{(0)} = 0, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I$ ； $\gamma_{i,j}^{(0)} = 0, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq I$ ； $\sigma_\gamma^{2(0)} = 0.001$ ； $\sigma_\phi^{2(0)} = 0.001$ 。将所有未决增量赔款的初始值设定为上三角增量赔款的平均值，即  $X_{i,j}^{(0)} = 28902$ ， $i + j \geq I + 1, 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq I$ 。

参数 Gibbs 抽样初始值的设定不作严格要求，只要在参数的合理区间内即可。Gibbs 抽样的开始阶段是一个“热身”（warm-up）的过程，随着循环次数的增多，参数样本会逐渐向后验分布收敛。因此，在 Gibbs 抽样完成之后，我们须将“热身”阶段的样本去掉，也就是进行“烧毁”（burn-in），最后保留下来的是不受初始值影响的 Gibbs 抽样样本。另外，由于 Gibbs 抽样过程本质是运行一条马氏链，相邻样本点之间具有相关关系，而我们的目的是获得服从后验分布的独立样本，所以还会采取间隔取样的方法，在 Gibbs 原始样本中每隔一段固定长度取一次样本观测，最终形成的样本容量往往小于模拟次数，但该样本近似于独立样本，基于该样本的参数估计和准备金估计也就比较准确。

#### (2) 参数估计、准备金估计与准备金风险度量

<sup>①</sup> Gibbs 采样是一种 MCMC 算法。MCMC——马尔可夫链蒙特卡洛（Markov Chain Monte Carlo）方法的发展对现代贝叶斯分析的复兴起着至关重要的作用。本文附录给出了关于马尔可夫链、蒙特卡洛方法以及马尔可夫链蒙特卡洛方法的直观实例。

WinBUGS 是进行贝叶斯数据分析的专业软件。如果我们将条件自回归泊松模型以及模型所需的数据用 WinBUGS 语言表示出来，那么，参数条件后验分布推导和 Gibbs 抽样更新过程便可以在 WinBUGS 软件中自动实现。关于 WinBUGS 的使用可以参阅 Spiegelhalter 等（2003）。

我们在 WinBUGS 软件中实现参数 Gibbs 抽样更新。在正式更新之前，试更新 1000 次，确保程序运行正常。然后设定监控参数，包括事故年效应、进展年效应、随机效应以及待预测的下三角未决增量赔款等。设定 Gibbs 抽样更新 50000 次，整个更新过程在英特尔酷睿三核处理器上耗时 67 分钟。

由于模型参数较多，限于篇幅，这里不展示全部结果，仅以相关随机效应参数  $\phi_{0,7}$  为例进行说明。随机效应  $\phi_{0,7}$  更新的样本轨迹如图 4.7。从图 4.7 可以看出，在 1001-21000 更新阶段，样本轨迹具有明显的下降趋势，在 21001-51000 更新阶段，样本轨迹开始趋于平稳。我们进一步把 21001-51000 更新阶段的样本放大，展示在图 4.7 中的右上角。其中，轨迹中间的虚线表示的是样本均值，可以看出样本观测始终围绕均值曲线上下波动。因此，我们把前 20000 次更新当作 Gibbs 抽样的“热身”阶段，只保留最后 30000 次更新样本作为分析样本，这 30000 次样本的更新轨迹没有明显趋势，可看作是来自于后验分布的平稳样本。

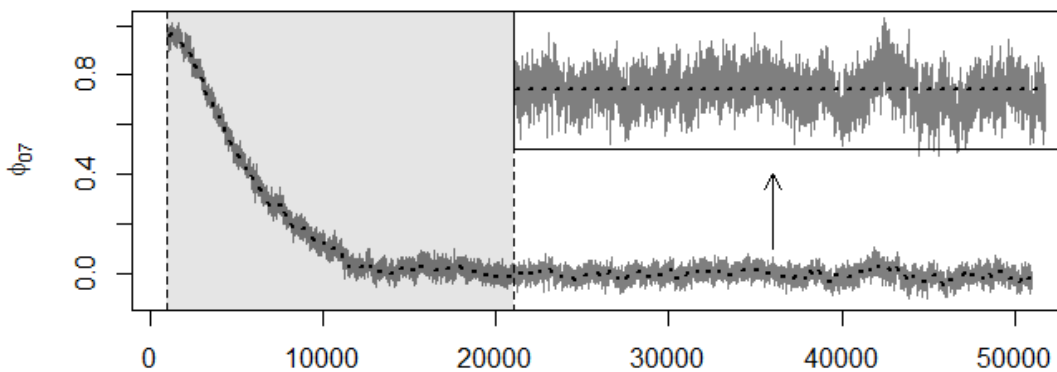


图 4.7 相关随机效应  $\phi_{0,7}$  MCMC 模拟的样本轨迹

由于 Gibbs 抽样更新过程的每一次更新都依赖于上一次更新结果，因此以上样本具有自相关性。图 4.8（1）为  $\phi_{0,7}$  30000 次更新的自相关图，可见样本的自相关性非常明显。我们利用间隔取样的方法减弱样本自相关性：从 30000 次样本中，每间隔 30 次取一个样本点，最终得到一个容量为 1000 的样本。图 4.8（2）为新样本的自相关图，可见，样本的自相关性明显减弱，利用这些样本可以估计各参数的后验分布。

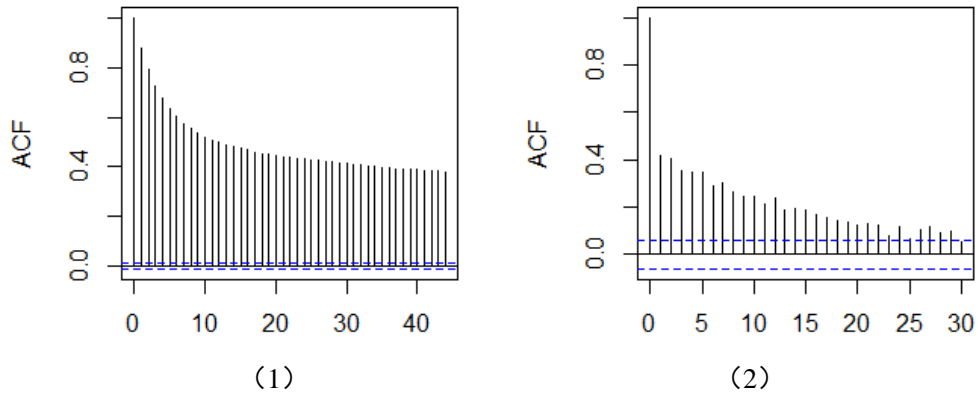


图 4.8 相关随机效应  $\phi_{0,7}$  的自相关图

图 4.9 (1) 给出了相关随机效应  $\phi_{0,7}$  的后验分布，而且标出了  $\phi_{0,7}$  的后验均值估计（黑色三角形）和 95% 后验置信区间的上下界（灰色三角形）。图 4.9 (2-4) 分别给出了未决增量赔款  $X_{3,19}$ 、第  $i=3$  事故年未决赔款  $R_3$  以及总未决赔款  $R$  的后验分布，而且在各图中还标出了后验分布均值估计（黑色三角形）和 95% 置信区间的上下界（灰色三角形）。这里，未决赔款后验分布均值估计就是准备金估计，95% 置信区间则代表未决赔款的波动程度，表示准备金风险大小。

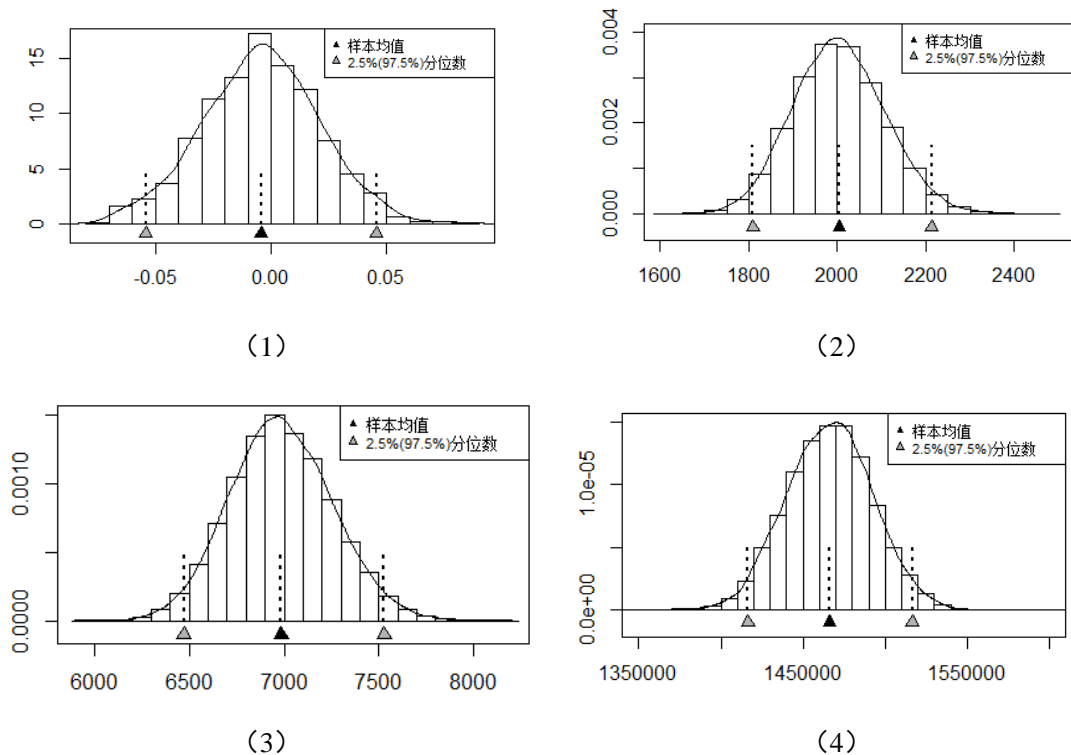


图 4.9  $\phi_{0,7}$  与未决增量赔款的后验分布

(3) 三种模型的结果比较

表 4.1 给出了条件自回归泊松模型 (M1) 下总未决赔款  $R$  的分布特征值:均值、标准差、中位数、95%置信区间长度等,另外还列出了过离散泊松模型 (M2) 和简单泊松模型 (M3) 的估计结果。从未决赔款的均值估计来看,三种模型差别不大,但从未决赔款的波动程度来讲,三种模型明显不同。简单泊松模型未决赔款的波动程度最小(标准差为 2380, 95%置信区间长度为 9332),过离散泊松模型未决赔款的波动程度较大(标准差为 11530, 置信区间长度为 44632),条件自回归模型下未决赔款的波动程度最大(标准差为 25852, 置信区间长度为 99973)。这与三种模型的模型假设是一致的:简单泊松模型假设增量赔款方差等于均值,而过离散泊松模型允许方差大于均值,所以过离散泊松模型未决赔款的波动程度大于简单泊松模型;条件自回归模型不仅反映了增量赔款的过离散特征,还进一步考虑了相邻事故年、进展年增量赔款的相关性,因此其未决赔款的波动程度应大于过离散泊松模型。

表 5.1 三种模型下总未决赔款的分布特征

三种评估模型	均值	标准差	2.5%分位数	中位数	97.5%分位数	95%区间长度
M1	1466082	25852	1416555	1423393	1516528	99973
M2	1474134	11530	1451026	1454497	1495709	44683
M3	1463088	2380	1458435	1459174	1467767	9332

### 4.3.3 模型评价与比较

本文利用 DIC 对以上三种模型进行评价。表 4.2 展示了三种模型的拟合偏差  $\bar{D}(\theta)$ 、有效参数个数  $p_D$  和 DIC。简单泊松模型最为简洁(有效参数  $p_D = 43$ ),但其拟合偏差较大( $\bar{D}(\theta) = 134588$ ),因而 DIC 最大( $DIC = 134631$ )。过离散泊松模型有效参数较多( $p_D = 235$ ),表明模型比较复杂,不过由于模型恰当地考虑了增量赔款的过离散特征,所以模型拟合偏差( $\bar{D}(\theta) = 4833$ )远小于简单泊松模型,因此综合来看过离散泊松模型 DIC 取值(5069)只有不到简单泊松模型的二十分之一。

表 4.2 基于 DIC 的模型评价

三种评估模型	$\bar{D}(\theta)$	$p_D$	DIC
M1	4314	239	4554
M2	4833	235	5069
M3	134588	43	134631

条件自回归模型不仅反映了增量赔款的过离散特征,还描述了相邻事故年、进展年增



量赔款的相关性，其对增量赔款的刻画更加合理，因而条件自回归模型的偏差（ $\bar{D}(\theta) = 4314$ ）是三个模型中最小的，而且由于为相关随机效应  $\phi_{i,j}$  设定了有约束的分布假设，所以条件自回归模型的有效参数数目（ $p_D = 239$ ）仅略多于过离散泊松模型（ $p_D = 235$ ）。综合来看，条件自回归泊松模型的  $DIC$  在这三个模型中是最小的，而且与过离散泊松模型的  $DIC$  的差值大于 5，这意味着与其他两个模型相比，条件自回归模型优势比较明显。

条件自回归泊松模型对过离散泊松模型的改进，还可以从残差符号三角形中得到解释。由于考虑了相邻事故年、进展年增量赔款的相关性，所以条件自回归泊松模型的残差应该是相互独立的。图 4.10 为条件自回归泊松模型的残差符号上三角形。为与图 4.4 进行比较，我们将图 4.4 中的 5 个残差块区域边界原封不动地画在了图 4.10 中。对比发现，图 4.10 中五个残差区域内的残差并不是“铁板一块”：每个区域里既有“+”又有“-”，而且“+”和“-”随机交替出现。这表明，条件自回归泊松模型下的残差三角形不再具有较强的正相关性，不同事故年、进展年的残差几乎相互独立。这些结论与条件自回归泊松模型的建模初衷是相一致的，也说明条件自回归泊松模型对传统独立泊松模型具有明显的改进效果。

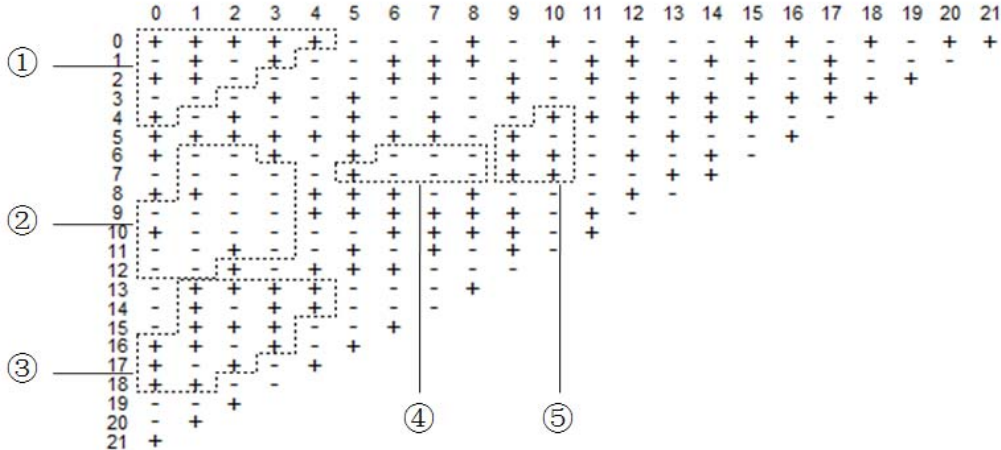


图 4.10 条件自回归泊松模型的残差符号三角形

### 4.4 本章小结

在利用泊松模型对增量赔款数据建模并对准备金进行估计时，常常假设增量赔款是相互独立的。通过分析过离散泊松模型拟合残差却发现，增量赔款数据也可能具有相关结构，特别是相邻事故年、进展年的增量赔款数据呈现正的相关性。为此，本文在过离散泊松模型基础上，添加了相关随机效应参数，并采用条件自回归模型对相关随机效应进行建模，

从而构建了描述赔款数据相关性的条件自回归泊松模型。在模型估计方面，本文采用贝叶斯方法，结合先验信息和赔款数据对条件自回归泊松模型进行估计，特别是利用 Gibbs 抽样等马尔科夫链蒙特卡罗方法对参数后验分布进行了随机模拟，最终得到准备金的估计值和准备金风险度量。此外，本文还利用偏差信息准则对不同模型的拟合与预测效果进行了评价。

基于真实赔款数据（Verrall 和 Wüthrich ,2012）的实证研究结果表明：从准备金估计的结果看，条件自回归泊松模型与泊松模型、过离散泊松模型差别不大，但从准备金风险度量来讲，三种模型明显不同，条件自回归泊松模型准备金风险度量值最大，这是因为条件自回归模型不仅反映了增量赔款的过离散特征，还进一步考虑了相邻事故年、进展年增量赔款的相关性。模型评价方面，因为条件自回归模型对增量赔款数据的刻画更加合理，所以条件自回归泊松模型模型的 *DIC* 在这三个模型中是最小的，这意味着与其他两个模型相比，条件自回归泊松模型优势比较明显。最后，基于残差符号的图示分析表明，条件自回归泊松模型下的残差三角形不再具有较强的正相关性，说明条件自回归泊松模型对传统独立泊松模型具有明显的改进效果。

## 第 5 章 模型不确定性对非寿险准备金风险

### 度量的影响研究

以往的研究，较多关注构建非寿险准备金评估模型，并对模型的参数和准备金进行估计，继而对准备金风险进行度量。鲜有文献研究模型的比较，也很少有研究关注选择不同的模型可能对准备金估计乃至准备金风险带来的影响。本章研究了两种不同准备金评估模型—Loglogistic 增长曲线模型和 Weibull 增长曲线模型—的准备金估计和风险度量问题，并创新性地提出利用贝叶斯模型平均方法对两个模型的结果进行加权平均，不仅得到了综合两个模型结果的准备金估计值，而且还得到了考虑模型不确定性后的准备金风险度量值。

#### 5.1 模型不确定性与贝叶斯模型平均方法

##### 5.1.1 关于模型不确定性的两个例子

在统计实践中，研究人员常构建一组模型，然后依据模型选择准则，从中挑选“最优”模型进行统计推断和预测。这里就有两个值得考虑的问题。第一，从模型选择准则来看，可能会得到若干模型对数据拟合都较好的结论。换句话说，这些模型难分伯仲，舍弃其中任何一个都让人感到可惜。Breiman 把这种现象称为模型的“罗生门效应”<sup>①</sup>（Rashomon Effect）。第二，即便可以选出最优模型，由于数据样本的随机性，每次挑选的最优模型也会有所不同，这称为模型的不确定性（Model Uncertainty）。在统计实践中，这两个问题较为普遍，但经常被研究人员所忽略。

精算中的很多模型属于统计模型，所以常常也面临模型不确定性问题。梳理文献我们发现，已有学者将贝叶斯模型平均方法引入到精算领域，用来处理精算模型的不确定性。这里，我们引用 Ntzoufras 等（2005）中的例子进行说明，Ntzoufras 等（2005）研究了索赔次数数据的建模问题。下表是文中讨论的八家汽车保险公司的索赔数据集。以表中第一行为例，这是 1961 年瑞士一家汽车保险公司索赔数据。可知，在 1961 年，有 103704 张保单没有发生索赔，有 14075 张保单发生了一次索赔，1766 张保单发生了两次索赔，其他数据具有类似的含义。

Ntzoufras 等（2005）关注的问题是，应该采用什么样的分布模型对索赔数据进行建模。为此，首先利用直方图对这些数据进行展示。图 5.1 为八个数据集的直方图，这些直方图

<sup>①</sup>《罗生门》是一部日本电影，在电影中，发生了一起刑事案件，一名男性被杀，另有一名女性被强奸。案件共有四名目击者，当他们在法庭作证时，面对同样的事件，却从自身利益出发讲述了完全不同的事情经过。Breiman 认为统计模型也具有“罗生门效应”，即不同模型讲述了关于同一数据的不一样的故事，而且听起来都非常逼真。

既有共同点又有差异。各直方图的第一个直条远远高于后面的其他直条，这表明在各数据集中，没有发生索赔的保单数量是最多的。各直方图尾部情况不一样，有的拖尾，而有的尾部很短，这表明有的数据集含有索赔频率较高的保单，而有的数据集索赔次数较高的保单较为稀少。

表 5.1 汽车保险的索赔数据集

数据集	索赔次数							
	0	1	2	3	4	5	6	7
瑞士 1961	103704	14075	1766	255	45	6	2	0
刚果 1974	3719	232	38	7	3	1	0	0
英国 1968	370412	46545	3935	317	28	3	0	0
德国 1964	20592	2651	297	41	7	0	1	0
比利时 1978	7840	1317	239	42	14	4	4	1
比利时 1975-76	96978	9240	704	43	9	0	0	0
比利时 1993	57178	5618	446	50	8	0	0	0
比利时 1994	118700	11468	930	70	14	0	0	0

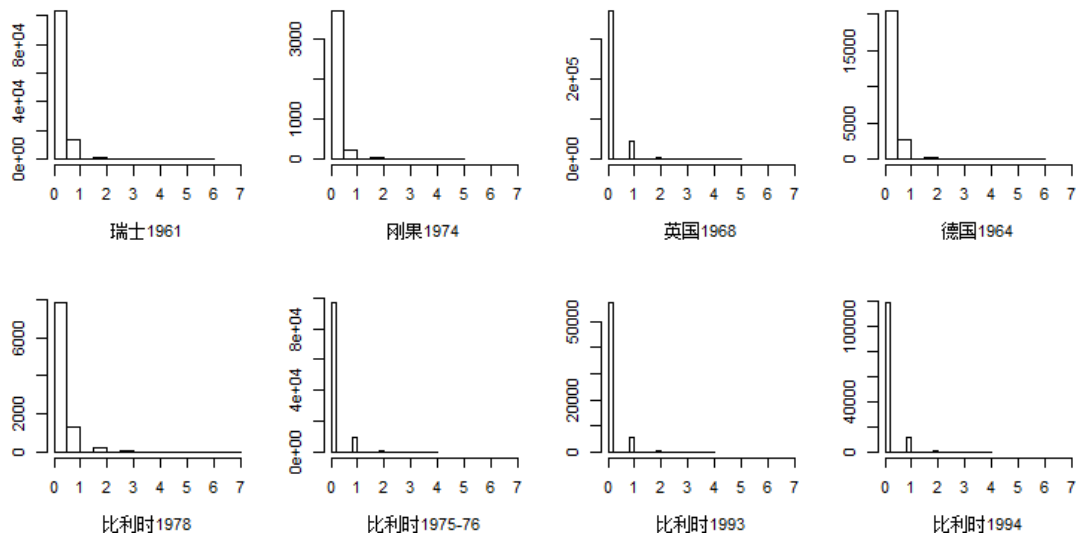


图 5.1 索赔次数直方图

但是，仅观察这些直方图，仍不能确定应采用何种分布模型对这些数据进行建模。研究文献里可供参考的分布模型非常多，例如泊松分布模型、伽马分布模型、泊松逆伽马分布模型、Delaporte 分布模型、广义泊松分布模型等。作为说明，Ntzoufras 等（2005）选用

了三种模型来考虑模型不确定性问题，这三个模型分别是泊松分布模型、负二项分布模型和广义泊松分布模型。在贝叶斯模型平均理论框架下，作者得到了针对每个数据集三种模型的后验概率，如下表所示。

表 5.2 模型的后验概率

数据集	泊松分布模型的后验概率	负二项分布模型的后验概率	广义泊松模型的后验概率
瑞士 1961	0.000	0.085	0.915
刚果 1974	0.000	0.440	0.560
英国 1968	0.000	0.312	0.688
德国 1964	0.000	0.361	0.639
比利时 1978	0.000	0.133	0.867
比利时 1975-76	0.000	0.448	0.552
比利时 1993	0.000	0.334	0.666
比利时 1994	0.000	0.378	0.622

我们发现，对于八个不同的数据集，泊松分布模型的后验概率均是 0。其原因不难解释：泊松分布模型假定索赔次数的期望与方差相等，这是非常严格的条件，实际情况并不满足该假定，所以泊松分布模型对实际数据的解释能力较差，其模型后验概率最低也就在意料之中。负二项分布模型和广义泊松分布模型允许方差大于期望，更符合实际情况，所以整体来看，这两个模型的后验概率较大，对数据拟合较好。当然，仔细分析，情况略有不同：对于瑞士 1961 数据集，两个模型差异较大，广义泊松分布模型的后验概率是负二项分布模型的十几倍之多。不过，对于其他七个数据集，虽然广义泊松模型的后验概率比较高，但与负二项分布模型的后验概率是可比的，差距并不悬殊。这些可比的后验概率表明模型存在不确定性。

如果将目光聚焦在非寿险准备金评估领域，我们发现模型不确定性问题也广为存在。随着现代统计模型与方法的不断发展与渗入，随机性准备金评估模型如雨后春笋般不断涌现。模型的多样化是一把双刃剑，一方面精算师有了更广阔的模型选择空间，可以使用不同的模型进行建模，另一方面，精算师往往凭借主观经验进行模型选择，并没有利用统计方法进行科学分析。例如，段白鸽（2014）发展了贝叶斯非线性分层模型，对多元索赔准备金评估进行了研究。她在论文的结尾写道：“本文进行这些分析仅仅是出于示例的目的，

忽略了正确的模型选择问题。关于模型选择和模型误差的问题可能是最困难的，通常没有相应的统计方法可以回答这样的问题。”她进一步认为，只能凭借长期的经验选择一个好的模型。

事实上，我们不仅可以凭借个人主观经验，还能够通过数据本身来研究模型选择与模型不确定性问题，所利用的工具就是贝叶斯模型平均方法。进行文献梳理时，我们发现 Verrall 和 Wüthrich（2012）是为数不多的研究非寿险准备金评估模型不确定性的文章，他们的工作对本文很有启发，所以这里进行详细说明。

Verrall 和 Wüthrich（2012）利用超散布泊松分布模型对增量赔款流量三角形数据进行建模，在该模型框架下，每个事故年、进展年分别均有相应的参数。以下图为例，这是一个含有 10 个事故年、10 个进展年的增量赔款流量三角形。阴影部分表示数据， $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_9$  表示事故年参数， $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_9$  表示进展年参数。可见，该流量三角形共有 55 个数据<sup>①</sup>，却至少有 20 个参数需要估计。数据量少，而有待估计的参数非常多，可以想见，这种情况下容易产生过拟合问题。

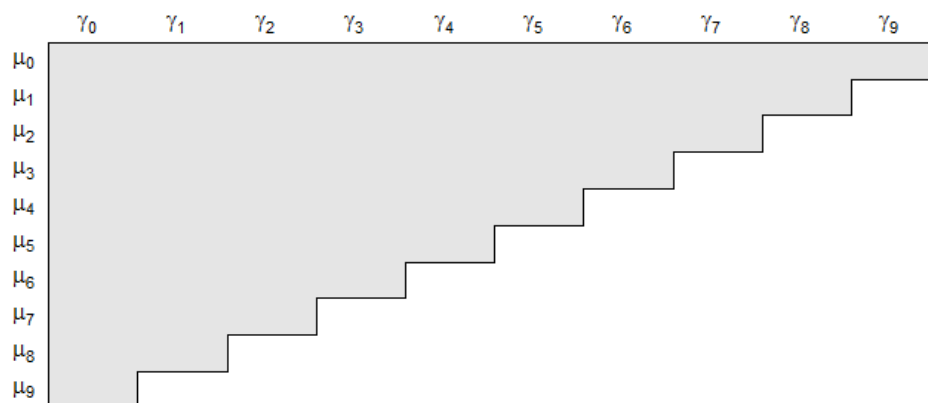


图 5.2 流量三角形与所需估计的参数

为避免过拟合问题，Verrall 和 Wüthrich（2012）提出了利用递减的指数曲线拟合尾部进展年参数的方法。以下图为例，不再直接估计  $\gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9$  五个进展年参数，而是间接地用如下的一条递减的指数曲线替代：

$$\gamma_j = \exp(\alpha - \beta j)$$

指数曲线函数中仅有两个参数  $\alpha$  和  $\beta$ ，所以只要估计出  $\alpha$  和  $\beta$ ，就能得到五个进展年参数  $\gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8, \gamma_9$  的估计。通过这种方法，我们将参数的数量减少了三个，这就有可能减轻或

<sup>①</sup>因为三角形共有 10 个事故年，10 个进展年，所以共有  $10 \times 11 / 2 = 55$  个数据。

避免过拟合问题。

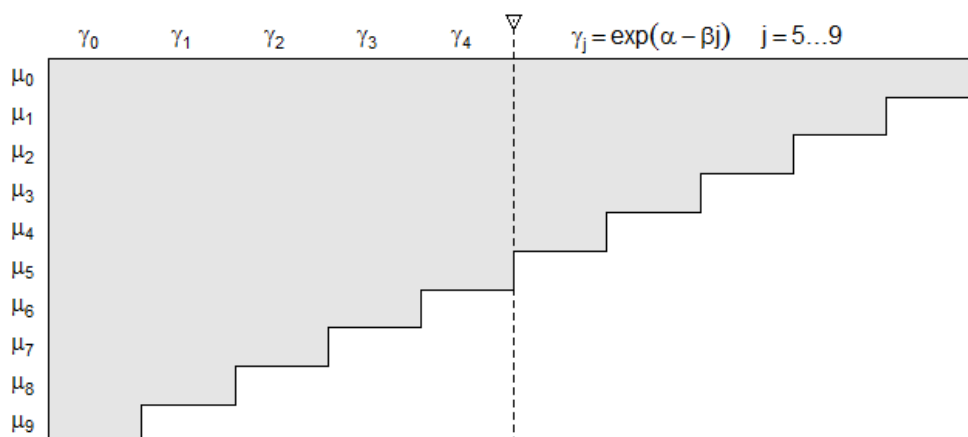


图 5.3 递减的指数曲线拟合尾部进展年参数

Verrall 和 Wüthrich (2012) 注意到，如果指数递减曲线的起始位置靠近左侧，比如从  $\gamma_1$  开始，就能大大减少参数的数量（如果从  $\gamma_1$  开始，参数个数减少 7 个），基本消除了过拟合问题。但此时，几乎所有进展年水平参数都须服从一条指数递减曲线，而事实上，真实的进展年水平有可能先增后减，不一定严格地服从一条指数递减曲线。所以，如果强制使用指数递减曲线对进展年水平参数进行拟合，会使模型的灵活性大打折扣。另一方面，如果指数递减曲线起始位置太靠近右侧，则起不到避免过拟合问题的效果。因此，在避免过拟合问题和保证模型的灵活性两方面，需要作出权衡，权衡关键在于确定指数递减曲线应从什么位置开始。

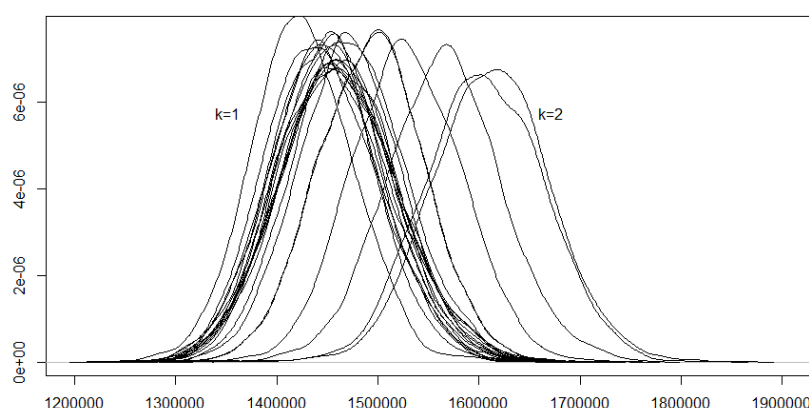


图 5.4 21 种模型未决赔款的预测分布

指数递减曲线起始位置不同，会对准备金的估计结果会产生显著影响。Verrall 和 Wüthrich (2012) 所研究的流量三角形共有 22 个进展年，所以指数递减曲线可以从 21 个不同的位置开始（初始进展年不计入），从不同位置开始就代表不同的模型。图 5.4 为 21

个模型各自未决赔款的预测分布。由图可见，虽然有些模型的预测分布互相重叠，聚集在一起，但整体来看，各个模型预测分布的中心位置差异很大，而且波动程度也有所不同。

特别地，我们以最左侧的预测分布和最右侧的预测分布进行说明，这两条分布曲线，分别对应指数递减曲线从第一进展年开始和第二进展年开始两种情形。由图可见，虽然指数曲线起始位置相邻，但是未决赔款的预测分布却有较大差异。两条预测分布曲线中心位置相距甚远，表明准备金估计结果显著不同，并且预测分布曲线“胖瘦”有别，说明未决赔款的波动程度也不一样。

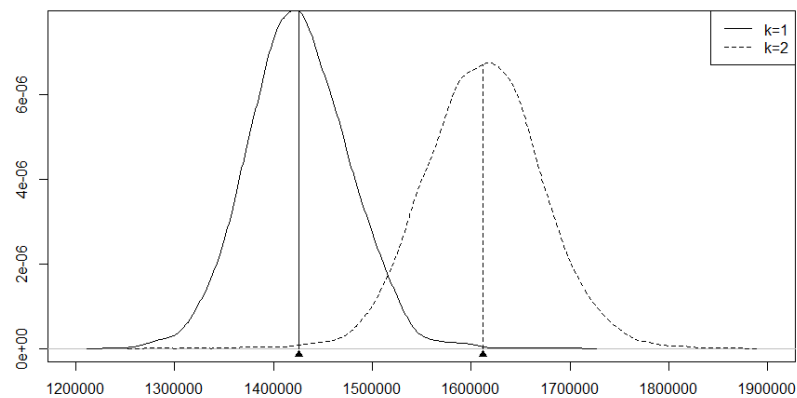


图 5.5 模型  $M_1$  和  $M_2$  未决赔款的预测分布

为对这些差异较大的模型进行评估，Verrall 和 Wüthrich（2012）利用贝叶斯模型平均方法，通过 RJMCMC 随机模拟技术，得到了各个模型的后验概率，如下图所示。图中，横轴表示模型编号，纵轴表示模型后验概率，这些后验概率是模型不确定性的定量测度。可见，指数递减曲线起始位置在第 7 进展年时，所对应模型的后验概率是最高的，超过了 60%。以下依次是第 6、9、10、8、11、12 进展年，其他模型的后验概率几乎为 0。

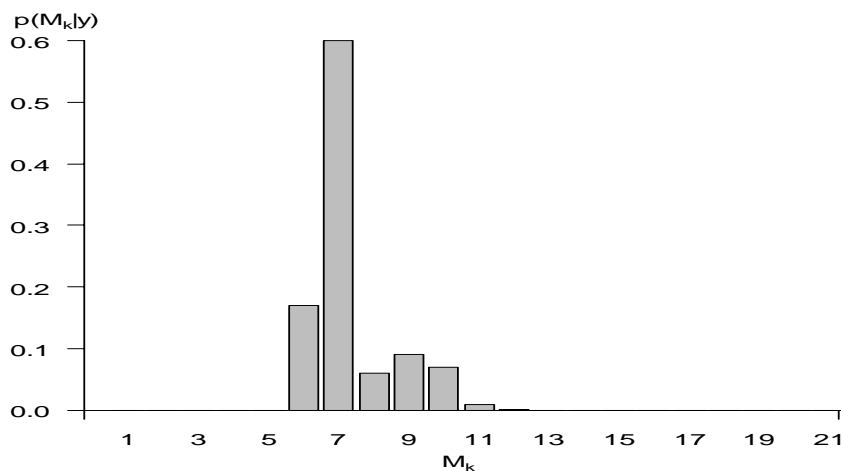


图 5.6 21 种模型的后验概率



利用模型的后验概率对各模型的预测分布进行加权。如下图所示，图中描绘了后验概率较大的几个模型的未决赔款的预测分布，均用浅色的曲线表示。而深色曲线所代表的预测分布，则是利用模型后验概率对各模型未决赔款预测分布加权的的结果。可见，通过贝叶斯模型平均方法得到的未决赔款预测分布曲线，不偏向也不摒弃任何一个模型，而是综合了各个模型的结果。

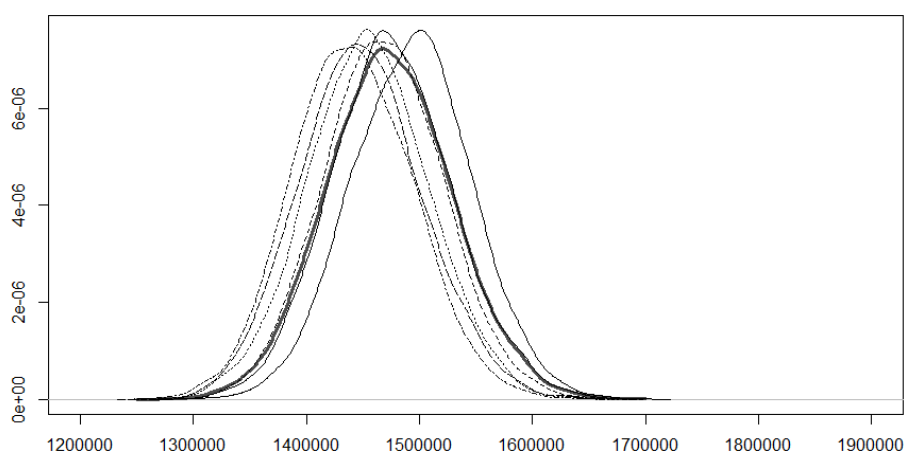


图 5.7 应用 BMA 方法得到的未决赔款的预测分布

### 5.1.2 贝叶斯模型平均方法的发展历程、基本原理与应用难点

贝叶斯模型平均 (Bayesian Model Averaging, BMA) 以贝叶斯理论为基础，将模型看作一个未知参数，通过赋予先验概率和后验概率来度量模型的不确定性，并利用后验概率对备选模型的推断和预测进行加权平均，得到更为稳健的推断和预测结果。不妨做一比喻，如果每种模型的结果都像含有金子的渣块，研究人员应像淘金者，与其比较并选择含金量最大的渣块，不如利用一种方法从所有的渣块中淘取出更多的金子。BMA 就是一种从各个模型中“淘金”的方法，它把所有模型的结果综合起来，发挥了各个模型的优势，传递了更多的信息。贝叶斯模型平均改变了人们对模型比较和模型选择的传统认识，是对经典建模理论的有益补充。

#### (1) BMA 的发展历程

二十世纪六十年代至八十年代是 BMA 思想酝酿时期。BMA 是模型平均理论的一个分支<sup>①</sup>。模型平均源于二十世纪六十年代。1963 年，Barnard 在研究航空旅客数据时第一次提出了模型综合的想法。1965 年，Roberts 考虑了一种结合两个专家观点的预测分布，这一分布本质上是两个模型后验分布的加权平均。1969 年，Bates 和 Granger 通过综合两个无偏

<sup>①</sup>模型平均方法另一个重要分支是频率模型平均 (Frequentist Model Averaging, FMA)。

预测来预测航空需求，肯定了模型综合方法在统计预测中的优势，Bates 和 Granger 的论文催生了二十世纪七十年代大量关于模型综合的理论和应用研究。1978 年，Leamer 进一步完善了模型综合理论，并提出了贝叶斯模型平均分析的基本范式（流程），Leamer 认为，BMA 就是从统计和概率的角度度量模型的不确定性。继 Leamer 的研究之后，BMA 的研究沉寂了一段时期。

二十世纪八十年代末九十年代初，MCMC 方法的发展极大地促进了现代贝叶斯统计学的复兴，与此同时，忽略模型不确定性带来的弊端也再次引发学者的思考。在这种背景下，George、Drapper、Raftery 等学者重新开展了 BMA 的研究，BMA 迎来了理论发展的黄金时期。在十多年的时间里，学者们针对设定先验分布、计算边际似然和模型搜索等难点问题进行了深入研究，并取得一系列理论进展。1999 年，Hoeting 等在国际著名统计期刊《统计科学》上发表综述文章，全面回顾九十年代 BMA 理论的研究成果，并对二十一世纪 BMA 的应用前景进行展望，这篇文章标志着 BMA 理论渐趋成熟，目前该文引用达 2727 次<sup>①</sup>。

进入二十一世纪以后，BMA 在国内外得到迅猛的发展和应用，这些应用领域包括气象预报、水文地理、医学健康、工程技术、计量经济学等。2005 年，Gneiting 和 Raftery 合作在世界顶级学术刊物《Science》的气象科学板块撰文，指出利用贝叶斯模型平均方法进行天气预测更为有效。

## (2) BMA 的基本原理

贝叶斯模型平均是一种从各个模型中淘取“金子”的方法。若  $\Delta$  是我们感兴趣的“金子”（ $\Delta$  可能是系数的估计，也可能是未来的预测），那么，在观测数据  $D$  给定的条件下，通过 BMA 得到的  $\Delta$  的后验分布是

$$p(\Delta | D) = \sum_{k=1}^K p(\Delta | M_k, D) p(M_k | D) \quad (5.1)$$

这里， $M_1, \dots, M_K$  是备选模型， $p(M_k | D)$  是备选模型  $M_k$  的后验概率，而  $p(\Delta | M_k, D)$  是在备选模型  $M_k$  下  $\Delta$  的后验分布。因此， $\Delta$  的后验分布  $p(\Delta | D)$  是各个模型下  $\Delta$  后验分布  $p(\Delta | M_k, D)$  的加权平均，加权权重为各个备选模型的后验概率。

根据  $\Delta$  的后验分布式 (5.1)，可以得到  $\Delta$  的后验均值和方差：

$$E(\Delta | D) = \sum_{k=1}^K \hat{\Delta}_k p(M_k | D) \quad (5.2)$$

<sup>①</sup> 截至 2016 年 1 月 1 号。

$$\text{Var}[\Delta | D] = \sum_{k=1}^K (\text{Var}[\Delta | D, M_k] + \hat{\Delta}_k^2) p(M_k | D) - E[\Delta | D]^2 \quad (5.3)$$

其中， $\hat{\Delta}_k$  表示备选模型  $M_k$  下  $\Delta$  的后验均值，即  $\hat{\Delta}_k = E[\Delta | D, M_k]$ 。因此，BMA 后验均值式 (5.2) 是各备选模型下后验均值的加权平均，加权权重为各个备选模型的后验概率。类似地，式 (5.3) 右侧第一项是各备选模型下后验二阶矩的加权平均，加权权重为各个备选模型的后验概率。

经验研究表明，由贝叶斯模型平均得到的式 (5.1) 和式 (5.2) 会改善单个模型的预测。一个直观的解释是，如果各个模型的预测都是无偏的，那么选择一个模型的预测，就如同从这些无偏预测中随机抽取一个预测，虽然结果无偏，但其方差也即不确定性仍然很大，而利用合适的权重对各个模型的预测值加权平均，不仅仍然可以得到无偏估计，还可以降低估计的方差，从而提高估计的准确性。可以证明，在对数得分 (logarithmic score) 或者损失函数等评价标准下，由贝叶斯模型平均得到的的预测，不仅优于单个模型的预测，而且比其他加权平均结果要好。

备选模型的后验概率  $p(M_k | D)$  非常重要，是淘金的“筛盘”，在式 (5.1)、式 (5.2) 和式 (5.3) 中均有出现。根据贝叶斯公式可以得到备选模型的后验概率：

$$p(M_k | D) = \frac{p(D | M_k) p(M_k)}{\sum_{l=1}^K p(D | M_l) p(M_l)} \quad (5.4)$$

这里， $p(M_k)$  是备选模型  $M_k$  的先验概率， $p(D | M_k)$  是在备选模型  $M_k$  下观测数据  $D$  的边际似然 (Marginal Likelihood)，即：

$$p(D | M_k) = \int p(D | \theta_k, M_k) p(\theta_k | M_k) d\theta_k \quad (5.5)$$

其中， $\theta_k$  表示模型  $M_k$  下的参数向量， $p(\theta_k | M_k)$  表示模型  $M_k$  下参数  $\theta_k$  的先验分布，而  $p(D | \theta_k, M_k)$  则表示在给定模型  $M_k$  和参数  $\theta_k$  下，观测数据  $D$  的似然函数。式 (5.5) 涉及积分运算，因此  $p(D | M_k)$  又被称为积分似然 (Integrated Likelihood)。

### (3) BMA 的应用难点

式 (5.1) - (5.5) 含义清楚易于理解，它们涵盖了 BMA 的基本方面。但在 BMA 的应用中，仍有许多细节需要考虑，某些细节至关重要已然成为 BMA 的应用难点。从上世纪 90 年代至今，学者围绕这些难点进行了深入研究并取得一系列理论进展。按照 BMA 分析

的流程，这些难点可以归纳为以下三个方面。

①设定先验分布。应用 BMA 时，首先需要设定参数和模型的先验分布。参数的先验分布出现在计算模型边际似然的式 (5.5) 中，而从式 (5.4) 可以看出，边际似然又是影响模型后验概率的关键，进而将影响 BMA 加权权重计算。此外，模型的先验概率也会影响模型后验概率，最终会影响到 BMA 的估计和预测。因此，如果选择了不稳健的先验分布，则不仅会得到失真的模型后验概率，还会降低 BMA 的预测能力。

②求解边际似然。边际似然直接影响模型后验概率。与似然函数不同，边际似然是似然函数在参数先验分布下的期望，涉及积分运算。积分运算常常是比较复杂的，尤其是当模型的参数  $\theta$  维度较多时，常见的积分算法很难处理这种高维积分问题。不过，在贝叶斯线性回归模型中，通过把参数设置为共轭先验，也可以得到边际似然解的解析形式。但共轭先验只是先验分布的一种特殊情形，在更为复杂的贝叶斯模型中，一旦根据需要把参数设定为非共轭先验，积分运算将变得非常困难，求解边际似然成为 BMA 的难点之一。

③搜索模型空间。利用近似或模拟等边际似然求解方法，可以得到单个模型的边际似然，但当备选模型的数量巨大时，要求出所有模型的边际似然乃至后验概率，在计算上是不可能完成的。例如，陈伟和牛霖琳在利用贝叶斯模型平均方法预测中国通货膨胀率时，考虑了 28 个解释变量，在单一模型为线性模型假设下，备选模型总数多达 268435456 个<sup>①</sup>。实际上，当解释变量个数超过 20 个时，就不能像式 (5.1) 那样对所有模型加权平均，这时，如何设计一种模型搜索策略在模型空间中进行搜索，得到模型空间的一个子集，然后在这个子集基础上进行 BMA，是学者关注的又一难点问题。

## 5.2 贝叶斯模型平均在两种非线性增长曲线模型组合中的应用

### 5.2.1 准备金评估的两种非线性增长曲线模型

了解赔款流量三角形的数据特征是构建准备金评估模型的出发点。我们研究了 4 个赔款数据集，这四个数据集的简称分别是 ABC、RAA、Mortgage 和 MCLpaid<sup>®</sup>。其中，ABC 是一家保险公司的工伤累计赔款流量三角形数据，共有 11 个事故年和 11 个进展年；RAA

---

<sup>①</sup> 线性回归模型中，每个解释变量都有两种选择：进入模型或在模型外。因此若有 5 个解释变量，则模型空间中共有  $2^5 = 32$  个备选模型，若有 20 个解释变量，则模型空间中共有  $2^{20} = 268435456$  个备选模型，可见备选模型的数量随解释变量个数增加呈指数式增长。

<sup>②</sup> 它们均是 R 的 ChainLadder 软件包自带的数据集。在 R 中查看这些数据集的方法是，首先利用 `library(ChainLadder)` 命令加载 ChainLadder 包，然后直接在命令行敲入数据集的名字即可。有关这四个数据集的详细信息可参阅相应的帮助文档，如 `help(ABC)` 命令就可以查阅 ABC 这个数据集的详细信息。

是一家车险的累计赔款流量三角形数据，共有 10 个事故年和 10 个进展年；Mortgage 是抵押担保保险的累计赔款流量三角形数据，共有 9 个事故年和 9 个进展年；MCLpaid 是火灾保险的累计赔款流量三角形，共有 7 个事故年和 7 个进展年。

这里不再展示四个数据集的原始数据，但绘制了四个数据集各事故年累计赔款随进展年发展变化的趋势图形。以 ABC 数据集为例，图中横轴表示事故年，纵轴表示累计赔款，图中共有 11 条曲线，分别表示各事故年累计赔款的进展情况，曲线上的标号即为事故年编号，比如 1 表示第一事故年，2 表示第二事故年等等，特别地，第 10 事故年用 0 表示，第 11 事故年用字母“a”表示。

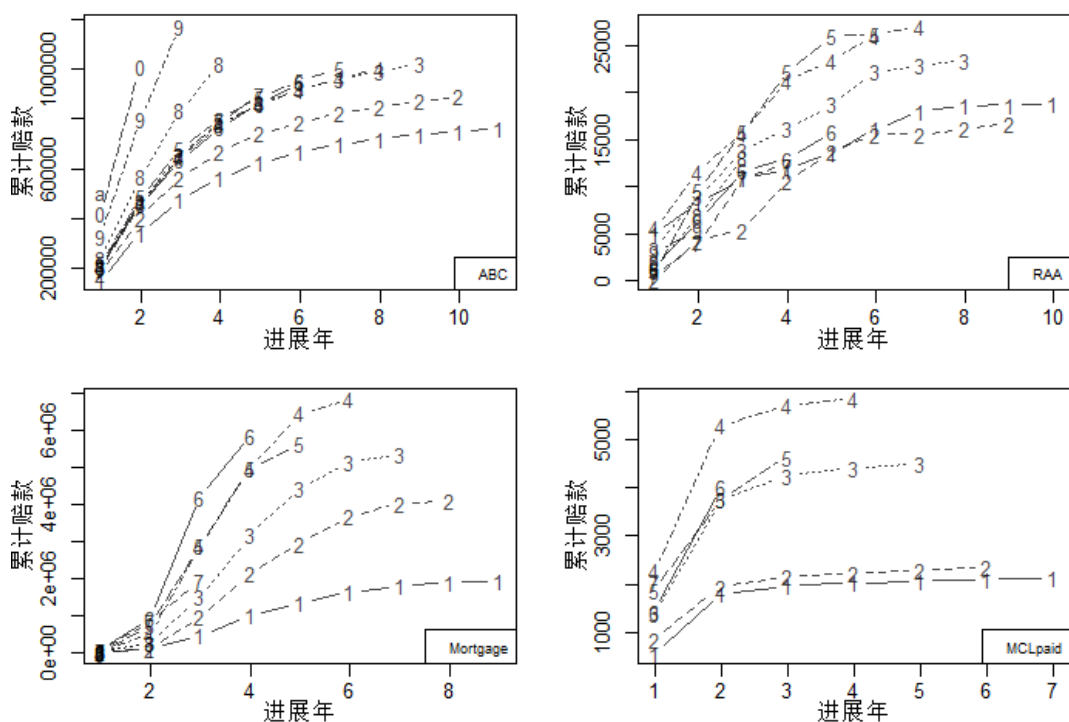


图 5.8 累计赔款的变化趋势

观察累计赔款的进展趋势，有几点发现：第一，每个事故年的累计赔款随进展年不断增长，不过在尾部进展年增长缓慢甚至停止增长；第二，每个事故年累计赔款的增长都是非线性的，但具有不同的特点，有的比较平滑（如 ABC 数据集），有的波动较大（如 RAA 数据集），有的增长遵从“慢-块-慢”的模式（如 Mortgage 数据集），有的却遵从先快后慢的模式（如 MCLpaid 数据集）；第三，即使在同一数据集中，各事故年累计赔款的进展趋势也不完全一样，例如，在 ABC 数据集中，各事故年累计赔款的起始位置有明显不同，累计赔款随进展年有“发散”的趋势。

为了对未决赔款准备金进行评估，需要对累计赔款数据进行建模，或者说利用统计模型对累计赔款的发展趋势进行描述。如上所述，累计赔款具有非线性增长的特征，因此可

以寻找一条非线性增长曲线对累计赔款建模。虽然可供选择的非线性增长曲线非常之多，但并不存在一条万能的非线性增长曲线，可以描述所有累计赔款的增长情况。与其寻找一条最佳的非线性增长曲线，不如利用贝叶斯模型平均方法将若干条非线性增长曲线组合起来进行分析，发挥各种增长曲线的优势，从而更好地解释数据，给出合理的准备金估计。

文献中常用两类非线性增长曲线是 Loglogistic 增长曲线和 Weibull 增长曲线，这两种曲线的函数表达式分别为：

$$G(x; \theta, w) = \frac{x^w}{x^w + \theta^w} \quad (5.6)$$

$$G(x; \theta, w) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^w\right) \quad (5.7)$$

事实上，这两种曲线的函数形式分别是 Loglogistic 分布和 Weibull 分布的累积分布函数，所以这两类增长曲线从零开始增长，渐渐地向 1 逼近，如下图所示。二者增长的速度略有不同，Loglogistic 曲线增长较慢，而 Weibull 曲线增长较快。因此，Loglogistic 增长曲线模型适用于长尾业务，而 Weibull 增长曲线模型适用于短尾业务。

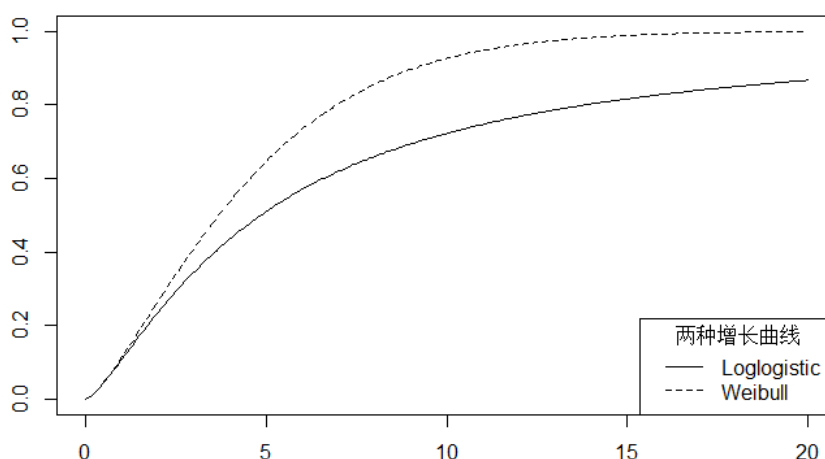


图 5.9 Loglogistic 和 Weibull 增长曲线

段白鸽和张连增（2013）在每一种非线性增长曲线下，结合贝叶斯分层建模技术，设计了 10 种模型结构，并针对准备金评估文献中常用的一组数据进行了实证研究<sup>①</sup>，得到了各模型的非寿险准备金估计值及预测均方误差。我们将模型结果绘制为如下所示的图形。按照曲线形式模型可分为两类，一类是由 Loglogistic 增长曲线构建的模型，一类是由 Weibull 增长曲线构建的模型；按照不同的模型结构划分，每一类曲线模型又有十个子模型。因此段白鸽和张连增（2013）一共估计了 20 个模型，如下图所示，每个模型结果以置信

<sup>①</sup> 这是非寿险准备金评估的一组经典数据，最早由 Taylor（1983）使用。R 中的 ChainLadder 包自带的数据集包含了这组数据（GenIns），可以利用“help（GenIns）”命令查看帮助文档了解这组数据集的详细信息。

区间的形式给出，区间的中点是准备金估计，区间的长度约为预测均方误差的 4 倍，所以在正态近似下，这可看作是置信度为 95% 的置信区间。

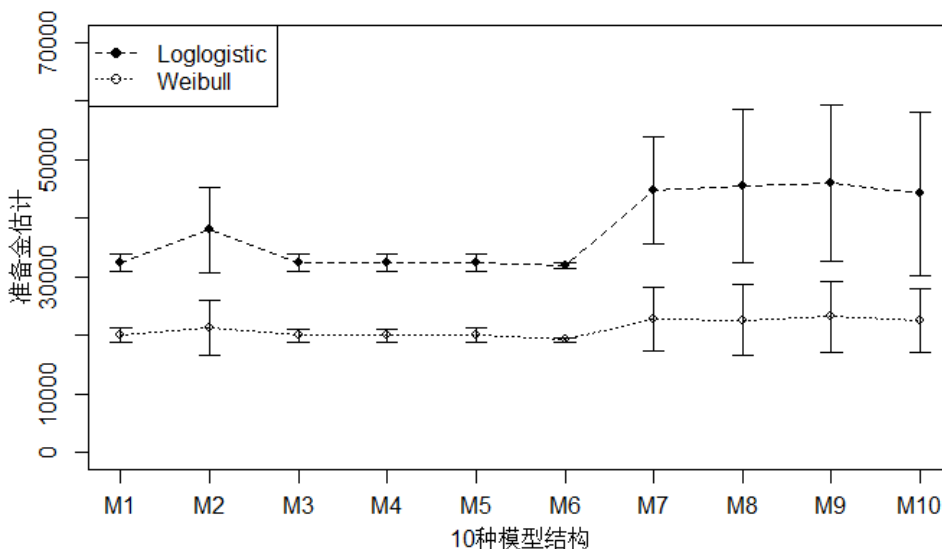


图 5.10 10 种不同模型结构下的准备金估计及误差

观察上图我们发现，在同一种增长曲线下，10 个子模型的准备金估计略有变化 (Loglog 曲线变化较大)，置信区间也有长有短，不过基本相互重叠，这主要是因为 10 个模型的假设和结构不同。但从不同的增长曲线来看，Loglogistic 增长曲线模型的准备金估计明显高于 Weibull 增长曲线，而且 10 种模型结构下的置信区间均没有重叠，这说明两种增长曲线模型的准备金估计差异在统计上是显著的。

既然这两种非线性增长曲线模型得到的准备金估计差异如此之大，准备金评估实务中的精算人员应该选择哪种曲线呢？段白鸽和张连增（2013）精心设计了模型，但他们并没有给出关于模型选择的建议。没有统计模型是一件坏事，有了太多的统计模型也未必是好事。每个模型给出的结果不一样，甚至差异很大，这使得精算人员陷入难以选择的困境。如何看待不同的增长曲线模型？它们只能是非此即彼的关系吗？贝叶斯模型平均理论可以帮助我们回答以上问题。不过，在运用贝叶斯模型平均方法之前，首先需要解决单个增长曲线模型的参数估计问题。

### 5.2.2 单个增长曲线模型的贝叶斯估计

为叙述方便，定义一组常用记号。将事故年记为  $i \in \{1, 2, \dots, I\}$ ，进展年记为  $j \in \{1, 2, \dots, J\}$ ，第  $i$  事故年发生的保险事故在第  $j$  进展年的累计赔款记为  $C_{i,j}$ 。另外，不失一般性，假设  $I = J$ 。  $D_I = \{C_{i,j} : 2 \leq i + j \leq I + 1; 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq I\}$  表示累计赔款上流量三角形数据，如下

表所示。

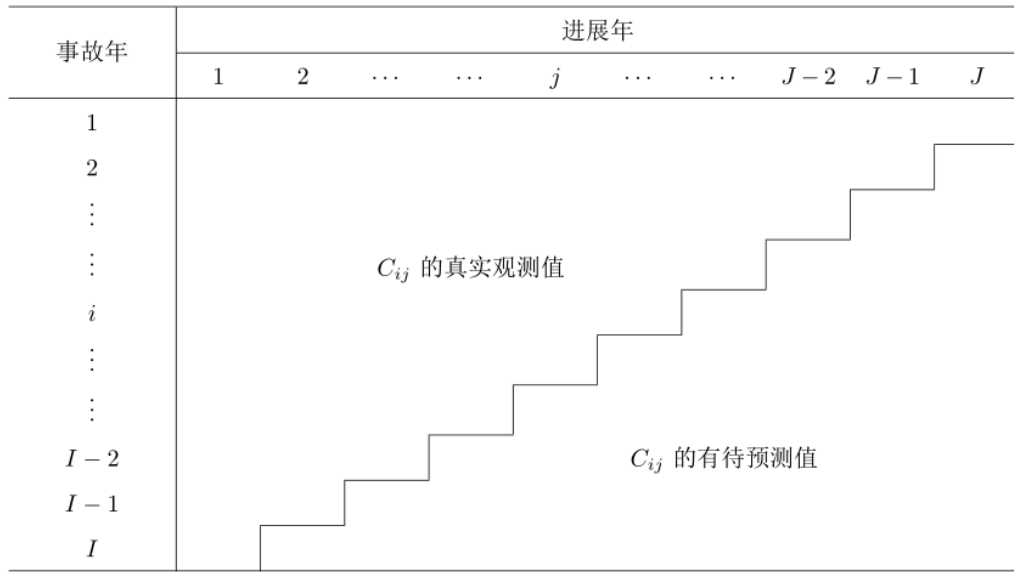


图 5.11 累计赔款数据上三角形

对累计赔款  $C_{i,j}$ ，我们有如下假设：

$$\log C_{i,j} \sim N(\log ult_i + \log G(j; \Theta), \sigma^2)$$

其中， $\log ult_i$  表示事故年  $i$  的最终损失的对数， $\sigma^2$  表示方差参数， $G(j; \Theta)$  表示依赖于参数  $\Theta$  的非线性增长曲线。选择不同的增长曲线意味着不同的准备金评估模型，这里我们选用两类常见的非线性增长曲线作为备选模型，即

备选模型 M1: Loglogistic 增长曲线：

$$G(j; \theta) = \frac{(j-0.5)^w}{(j-0.5)^w + \theta^w}$$

备选模型 M2: Weibull 增长曲线：

$$G(j; \theta) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{j-0.5}{\theta}\right)^w\right)$$

其中， $w$  为形状参数， $\theta$  为尺度参数，二者均为正数。

我们采用贝叶斯方法对上述参数进行估计，参数的先验分布如下<sup>①</sup>：

$$\log ult_i \sim N(\log ult, \sigma_{ult}^2) \quad \log ult \mid \sigma_{ult}^2 \sim N(\log \mu_0, \frac{\sigma_{ult}^2}{k_0})$$

$$\sigma_{ult}^2 \sim Inv - \chi^2(v_0, \sigma_0^2) \quad \sigma^2 \sim Inv - \chi^2(v_1, \sigma_1^2)$$

<sup>①</sup> 这里我们采用了共轭先验分布形式，这样，参数的完全条件后验分布就是我们熟悉的分布形式，为 Gibbs 抽样提供方便。



$$\log w \sim N(0,100^2) \quad \log \theta \sim N(0,100^2)$$

根据模型的假设， $ult_i$ 、 $\log ult$ 、 $w$ 和 $\theta$ 均为正数，其取值具有明确的界限，在进行参数推断时要时刻考虑这个问题。解决这个问题一个策略是，在设置这些参数的先验分布时，如上所示可以先对它们取对数，这样我们把正数范围扩展到整个实数范围。在参数MCMC模拟中，就可暂不考虑参数取值范围的影响。

根据贝叶斯定理，参数联合后验分布与似然函数和参数先验分布的乘积成正比，即

$$\begin{aligned} & p(\log ult_1, \dots, \log ult_I, \log ult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log w, \log \theta | D) \\ & \propto \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^{I+1-i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{[\log C_{i,j} - \log ult_i - \log G(j;\theta)]^2}{2\sigma^2}} \times \prod_{i=1}^I \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ult}} e^{-\frac{(\log ult_i - \log ult)^2}{2\sigma_{ult}^2}} \\ & \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ult}/\sqrt{k_0}} e^{-\frac{(\log ult - \mu_0)^2}{2\sigma_{ult}^2/k_0}} \times [\sigma_{ult}^2]^{-\frac{\nu_0}{2}-1} e^{-\frac{\nu_0\sigma_0^2}{2\sigma_{ult}^2}} \times [\sigma^2]^{-\frac{\nu_1}{2}-1} e^{-\frac{\nu_1\sigma_1^2}{2\sigma^2}} \\ & \times N(\log w | 0, 100^2) \cdot N(\log \theta | 0, 100^2) \end{aligned} \quad (5.8)$$

显然，参数的联合后验分布形式比较复杂，很难直接对其进行分析。一般采用MCMC方法（包括Gibbs抽样和Metropolis-Hastings抽样）对其进行随机模拟。为进行Gibbs抽样，首先推导参数的条件后验分布。

(1) 参数 $\log ult_i$ 的条件后验分布是正态分布：

$$\log ult_i | D, \log ult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log \omega, \log \theta \sim N(\text{mean}_i, \text{var}_i)$$

其中，期望和方差分别是：

$$\begin{aligned} \text{mean}_i &= \frac{\frac{1}{\sigma^2/I+1-i} \frac{\sum_{i=1}^{I+1-i} \log C_{i,j} - \log G(j;\Lambda)}{I+1-i} + \frac{1}{\sigma_{ult}^2} \log ult}{\frac{1}{\sigma^2/I+1-i} + \frac{1}{\sigma_{ult}^2}} \\ \text{var}_i &= \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2/I+1-i} + \frac{1}{\sigma_{ult}^2}} \end{aligned}$$

(2) 参数 $\log ult$ 的条件后验分布是正态分布：

$$\log ult | D, \log ult_1, \dots, \log ult_I, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log \omega, \log \theta \sim N(\text{mean}, \text{var})$$

其中，期望和方差分别是：

$$\text{mean} = \frac{\frac{k_0}{\sigma_{ult}^2} \log \mu_0 + \frac{1}{\sigma_{ult}^2} \frac{\sum_{i=1}^I \log ult_i}{I}}{\frac{k_0}{\sigma_{ult}^2} + \frac{I}{\sigma_{ult}^2}}$$

$$\text{var} = \frac{1}{\frac{k_0}{\sigma_{ult}^2} + \frac{I}{\sigma_{ult}^2}}$$

(3) 参数  $\sigma_{ult}^2$  的条件后验分布是逆卡方分布:

$$\sigma_{ult}^2 | D, \log ult_1, \dots, \log ult_I, \log ult, \sigma^2, \log \omega, \log \theta \sim \text{Inv} - \chi^2(d_1, S_1)$$

其中, 自由度和尺度参数分别为:

$$d_1 = I + \nu_0 + 1$$

$$S_1 = \frac{\sum_{i=1}^I (\log ult_i - \log ult)^2 + k_0 (\log ult - \mu_0)^2 + \nu_0 \sigma_0^2}{I + \nu_0 + 1};$$

(4) 参数  $\sigma^2$  的条件后验分布为逆卡方分布:

$$\sigma^2 | D, \log ult_1, \dots, \log ult_I, \log ult, \sigma_{ult}^2, \log \omega, \log \theta \sim \text{Inv} - \chi^2(d_2, S_2)$$

其中, 自由度和尺度参数分别为:

$$d_2 = \nu_1 + I(I + 1)$$

$$S_2 = \frac{\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{I+1-i} (\log C_{i,j} - \log ult_i - \log G(j; \Lambda))^2 + \nu_1 \sigma_1^2}{\nu_1 + I(I + 1)};$$

(5) 参数  $(w, \theta)$  的条件后验分布形式比较特殊:

$$p(\log w, \log \theta | D, \log ult_1, \dots, \log ult_I, \log ult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2)$$

$$\propto \exp\left(-\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{I+1-i} (\log C_{i,j} - \log ult_i - \log G(j; \Lambda))^2\right)$$

$$\times N(\log w | 0, 100^2) N(\log \theta | 0, 100^2)$$

除了  $(\log w, \log \theta)$  两个参数外, 其他参数的条件后验分布都具有共轭形式, 即后验分布与先验分布的形式是一致的。在参数的条件后验分布已知的情况下, 就可以利用 Gibbs 抽样的方法对参数的后验分布进行随机模拟。模型中需要估计的参数主要有

$$\log ult_i (1 \leq i \leq I) \quad \log ult \quad \sigma_{ult}^2 \quad \sigma^2 \quad (\log w, \log \theta)$$

利用 Gibbs 抽样对上述参数进行更新的步骤如下:

第 1 步：设定参数初始值：

$$\Psi^{(0)} = (\log ult_1^{(0)}, \dots, \log ult_I^{(0)}, \log ult^{(0)}, \{\sigma_{ult}^2\}^{(0)}, \{\sigma^2\}^{(0)}, \log w^{(0)}, \log \theta^{(0)})$$

第 2 步：从以下条件后验分布中抽取  $\log ult_i^{(1)}$

$$\log ult_i | D, \log ult^{(0)}, \{\sigma_{ult}^2\}^{(0)}, \sigma^{2(0)}, \log w^{(0)}, \log \theta^{(0)} \sim N(\text{mean}_i, \text{var}_i)$$

第 3 步：从以下条件后验分布中抽取  $\log ult^{(1)}$ ；

$$\log ult | D, \log ult_1^{(1)}, \dots, \log ult_I^{(1)}, \{\sigma_{ult}^2\}^{(0)}, \{\sigma^2\}^{(0)}, \log w^{(0)}, \log \theta^{(0)} \sim N(\text{mean}, \text{var})$$

第 4 步：从以下条件后验分布中抽取  $\{\sigma_{ult}^2\}^{(1)}$ ；

$$\sigma_{ult}^2 | D, \log ult_1^{(1)}, \dots, \log ult_I^{(1)}, \log ult^{(1)}, \{\sigma^2\}^{(0)}, \log w^{(0)}, \log \theta^{(0)} \sim \text{Inv} - \chi^2(d_1, S_1)$$

第 5 步：从以下条件后验分布中抽取  $\{\sigma^2\}^{(1)}$ ；

$$\sigma^2 | D, \log ult_1^{(1)}, \dots, \log ult_I^{(1)}, \log ult^{(1)}, \{\sigma_{ult}^2\}^{(1)}, \log w^{(0)}, \log \theta^{(0)} \sim \text{Inv} - \chi^2(d_2, S_2)$$

第 6 步：从以下条件后验分布中抽取  $(\log w^{(1)}, \log \theta^{(1)})$ 。

$$\begin{aligned} & p(\log w, \log \theta | D, \log ult_1^{(1)}, \dots, \log ult_I^{(1)}, \log ult^{(1)}, \{\sigma_{ult}^2\}^{(1)}, \{\sigma^2\}^{(1)}) \\ & \propto \exp\left(-\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{I+1-i} (\log C_{i,j} - \log ult_i - \log G(j; \Lambda))^2\right) \\ & \quad \times N(\log w | 0, 100^2) N(\log \theta | 0, 100^2) \end{aligned}$$

至此，完成了所有参数的第一次更新<sup>①</sup>：

$$\Psi^{(1)} = (\log ult_1^{(1)}, \dots, \log ult_I^{(1)}, \log ult^{(1)}, \{\sigma_{ult}^2\}^{(1)}, \{\sigma^2\}^{(1)}, \log w^{(1)}, \log \theta^{(1)})$$

而在此基础上，从以下分布抽取随机数可以得到各事故年最终累计赔款的模拟值：

$$\log C_{i,l}^{(1)} \sim N(\log ult_i^{(1)} + \log G(I; w^{(1)}, \theta^{(1)}), \{\sigma^2\}^{(1)})$$

$$\log C_{i,\infty}^{(1)} \sim N(\log ult_i^{(1)} + \log G(\infty; w^{(1)}, \theta^{(1)}), \{\sigma^2\}^{(1)})$$

前者是不考虑尾部进展因子，即认为赔款在第  $I$  进展年全部结清；后者考虑尾部进展

---

<sup>①</sup>第 2 步至第 5 步涉及正态分布和逆卡方分布随机数的生成。正态分布和逆卡方分布是较为常见的分布形式，在 R 软件中有现成的函数生成它们的随机数，例如生成正态分布随机数的函数 `rnorm()`。服从逆卡方分布的随机变量可以由卡方分布的随机变量转化而来，所以可以先利用 `rchisq()` 函数生成卡方分布随机数，然后求倒数就能得到逆卡方分布随机数。第 6 步  $(\log w, \log \theta)$  的条件后验分布不是常见的分布，形式比较复杂，我们可以利用 Metropolis-Hastings 算法生成这种分布的随机数。在 R 软件的 `LearnBayes` 包中有执行 Metropolis-Hastings 算法的函数：`rwmetrop()`，关于该函数的参数信息可以参见其帮助文档。

因子，即认为赔款在第  $I$  进展年后可能会继续发生。

第 7 步：不断重复如上的更新过程  $T$  次，得到容量为  $T$  的参数后验分布样本  $\{\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \dots, \Psi^{(T)}\}$ ，另外还包括两种情形下事故年  $i$  最终赔款的模拟值  $\{\log C_{i,I}^{(1)}, \log C_{i,I}^{(2)}, \dots, \log C_{i,I}^{(T)}\}$  和  $\{\log C_{i,\infty}^{(1)}, \log C_{i,\infty}^{(2)}, \dots, \log C_{i,\infty}^{(T)}\}$ 。

根据最终赔款的模拟样本值，可以得到两种情形下事故年  $i$  未决赔款的均值估计：

$$\hat{R}_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T C_{i,I}^{(t)} - C_{i,I+1-i} \quad 0 \leq i \leq I$$

$$\hat{R}_{i\infty} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T C_{i,\infty}^{(t)} - C_{i,I+1-i} \quad 0 \leq i \leq I$$

以及相应的总未决赔款的均值估计也即准备金估计：

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i \quad \hat{R}_{\infty} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_{i\infty}$$

### 5.2.3 两个增长曲线模型的贝叶斯模型平均

首先需要设定模型先验概率。在贝叶斯模型平均应用中，一般会将模型先验分布设定为均匀分布，即为所有模型指定相同的先验概率：

$$p(M_k) = \frac{1}{K} \quad k = 1, \dots, K \quad (5.9)$$

这里， $K$  是模型空间中备选模型的总数。模型的均匀先验表明，在分析伊始，对所有备选模型一视同仁，不偏向也不歧视其中一个模型。从形式上看，均匀先验直观透明，而从应用角度来说，均匀先验简洁、方便。本文为两个增长曲线模型设定均匀先验，即  $p(M_1) = p(M_2) = 0.5$ 。

然后推导模型后验概率。在均匀先验下，模型后验概率可以进一步简化：

$$p(M_k | D) = \frac{p(D | M_k) p(M_k)}{\sum_{l=1}^K p(D | M_l) p(M_l)} = \frac{p(D | M_k)}{\sum_{l=1}^K p(D | M_l)}$$

由上式可以看出，由于各模型先验概率相同，分子分母的先验概率一项可以消去，这样，模型后验概率不再受先验概率影响，仅由各备选模型的边际似然决定。我们采用 Chib (1995) 提出的方法计算边际似然。首先考虑基础边际似然恒等式：

$$p(D) = \frac{p(D | \Theta) p(\Theta)}{p(\Theta | D)}$$

上式对于所有  $\Theta$  均成立。因此不妨取  $\Theta$  为后验均值估计  $\Theta^*$ ：

$$p(D) = \frac{p(D|\Theta^*)p(\Theta^*)}{p(\Theta^*|D)} \quad (5.10)$$

先验分布形式已知，所以  $p(\Theta^*)$  容易计算，而  $p(D|\Theta^*)$  表示在  $\Theta^*$  处似然函数的取值，也易解出。因此，上式中分子  $p(D|\Theta^*)p(\Theta^*)$  的计算比较容易，难点在于计算分母  $p(\Theta^*|D)$ ，这是在  $\Theta^*$  处后验分布密度的取值。下面着重分析  $p(\Theta^*|D)$  的求解过程。假设模型参数在后验均值处的取值为：

$$\Theta^* = (\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*, \log w^*, \log \theta^*)$$

按照条件概率的公式， $p(\Theta^*|D)$  可以展开如下：

$$\begin{aligned} p(\Theta^*|D) &= p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*, \log w^*, \log \theta^* | D) \\ &= p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^* | D) \times p(\log ult^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*) \\ &\quad \times p(\{\sigma_{ult}^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*) \\ &\quad \times p(\{\sigma^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*) \\ &\quad \times p(\log w^*, \log \theta^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*) \end{aligned}$$

按照附录 B 的方法，我们可以求出五个条件密度，从而得到在  $\Theta^*$  处联合后验分布密度的取值。代入式 (5.10) 就可以得到模型的边际似然。利用模型的边际似然  $p(D|M_k)$ ，可得两个非线性增长曲线模型的后验概率：

$$p(M_1|D) = \frac{p(D|M_1)}{p(D|M_1) + p(D|M_2)}$$

$$p(M_2|D) = \frac{p(D|M_2)}{p(D|M_1) + p(D|M_2)}$$

利用模型后验概率对两种非线性增长曲线模型准备金进行加权平均：

$$E(\Delta|D) = E(\Delta|M_1, D)p(M_1|D) + E(\Delta|M_2, D)p(M_2|D) \quad (5.11)$$

另外，也可以对两种非线性增长曲线模型未决赔款预测分布进行加权平均：

$$p(\Delta|D) = p(\Delta|M_1, D)p(M_1|D) + p(\Delta|M_2, D)p(M_2|D) \quad (5.12)$$

### 5.3 实证研究

### 5.3.1 数据来源

本文用于实证研究的数据来自 Taylor and Ashe (1983)，如下表所示。这是准备金评估研究中常用的流量三角形数据。目前，R 软件 ChainLadder 包自带的数据集也包含这组数据：在 R 的命令行运行 `library(ChainLadder)` 命令加载 ChainLadder 包，然后执行 `GenIns` 命令就可以显示这组累计赔款流量三角形数据，利用 `cum2incr(GenIns)` 命令还可以查看这组赔款数据的增量形式。

表 5.3 累计赔款流量三角形

单位：千元

事故年	进展年									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	357.8	1124.8	1735.3	2218.3	2745.6	3320.0	3466.3	3606.3	3833.5	3901.5
2	352.1	1236.1	2170.0	3353.3	3799.1	4120.1	4647.9	4914.0	5339.1	
3	290.5	1292.3	2218.5	3235.2	3986.0	4132.9	4628.9	4909.3		
4	310.6	1418.9	2195.0	3757.4	4029.9	4382.0	4588.3			
5	443.2	1136.4	2128.3	2897.8	3402.7	3873.3				
6	396.1	1333.2	2180.7	2985.8	3691.7					
7	440.8	1288.5	2419.9	3483.1						
8	359.5	1421.1	2864.5							
9	376.7	1363.3								
10	344.0									

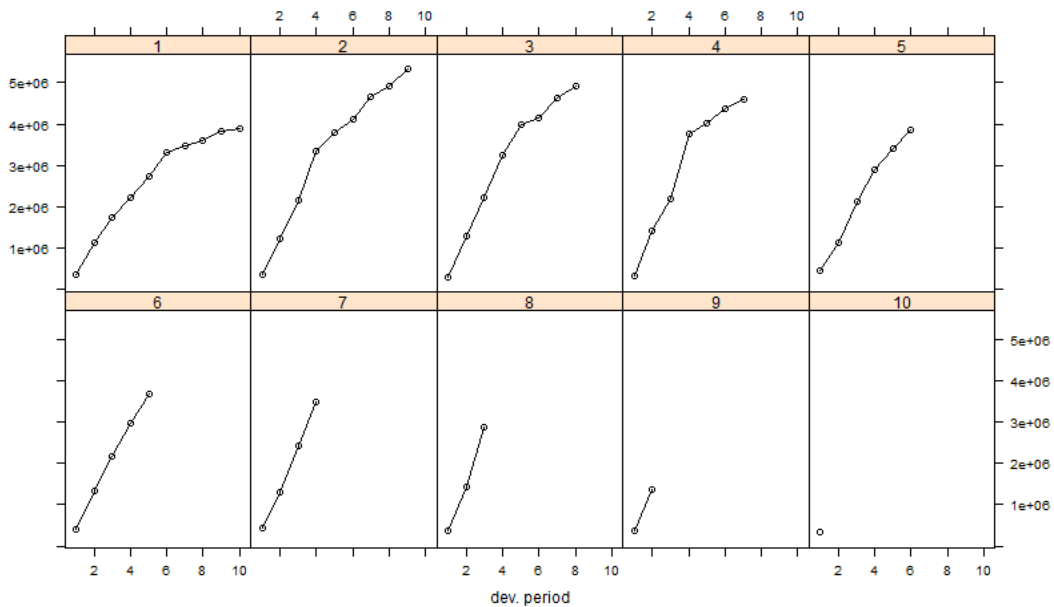


图 5.12 累计赔款进展曲线图

表 5.3 所示的流量三角形描述了不同事故年累计赔款的进展情况。为更清晰的展示累计赔款的增长趋势，我们绘制了累计赔款进展曲线，如图 5.12 所示。从图中可以看出，累

计赔款的进展并非是线性的，而是具有非线性增长模式，这正是我们应用非线性增长曲线模型的依据之一。

为了便于与后续建立的模型比较，下表报告了由链梯法得到的准备金的均值估计和 MSEP 估计<sup>①</sup>。

表 5.4 链梯法得到的准备金估计 单位：千元

事故年	已付赔款	最终赔款	准备金	MSEP
1	3901.5	3901.5	0.0	0.0
2	5339.1	5433.7	94.6	71.8
3	4909.3	5378.8	469.5	119.5
4	4588.3	5297.9	709.6	131.6
5	3873.3	4858.2	984.9	260.5
6	3691.7	5111.2	1419.5	410.4
7	3483.1	5660.8	2177.6	557.8
8	2864.5	6784.8	3920.3	874.9
9	1363.3	5642.3	4279.0	971.0
10	344.0	4969.8	4625.8	1363.0
总计	34358.1	53038.9	18680.9	2441.4

### 5.3.2 单个增长曲线模型的贝叶斯估计

Loglogistic 增长曲线模型中,先验分布超参数的取值如下:

$$\log \mu_0 = \log(3901463) \quad k_0 = 0.00000001$$

$$v_0 = v_1 = 0.05 \quad \sigma_0^2 = 2 \quad \sigma_1^2 = 2$$

各参数 Gibbs 抽样抽样的初始值如下:

$$\log ult_i = \log(3901463) \quad \log ult = \log(3901463)$$

$$\sigma_{ult}^2 = 4 \quad \sigma^2 = 2 \quad \log(w, \theta) = (0.1, 0.1)$$

参数 Gibbs 抽样初始值设定不作严格要求，只要在参数的合理区间内即可。Gibbs 抽样的开始阶段是一个“热身”（warm-up）的过程，在这个热身过程中，随着循环次数的增多，参数样本会逐渐从初始值向后验分布收敛。因此，热身阶段的样本与后验分布并不一致，在 Gibbs 抽样完成之后，应将“热身”阶段的样本去掉，或者“烧毁”（burn-in），最后保留不受初始值影响的 Gibbs 抽样样本。

借助 R 软件对备选模型中所涉及的  $\log ult_1, \dots, \log ult_t, \log ult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2$  和  $\log w, \log \theta$  等参数

<sup>①</sup> 利用 Chainladder 包中的 MackChainLadder () 函数可以得到这些结果。

进行仿真模拟,模拟次数为 10000 次<sup>①</sup>。下图所示为 loglogistic 增长曲线模型  $\log ult$ 、 $\log ult_1$ 、 $\sigma_{ult}^2$  和  $\log w$  的模拟。从图中可以看出,即使参数的初始值与后验分布的中心位置有较大的差距,随着马氏链的不断更新, $\log ult$  也会逐渐向后验分布的中心位置转移,这个转移过程就是 MCMC 模拟的热身阶段。这里,我们设置 warm-up 的长度为 1000,在图中用阴影部分表示。在参数后验推断中,我们将舍弃这部分样本,只保留后续样本。整体来看,后续的 9000 次样本轨迹没有明显的上升或下降趋势,表明马氏链达到平稳状态。这 9000 次样本可以看做来自于后验分布的抽样样本,可直接用来进行参数后验推断。

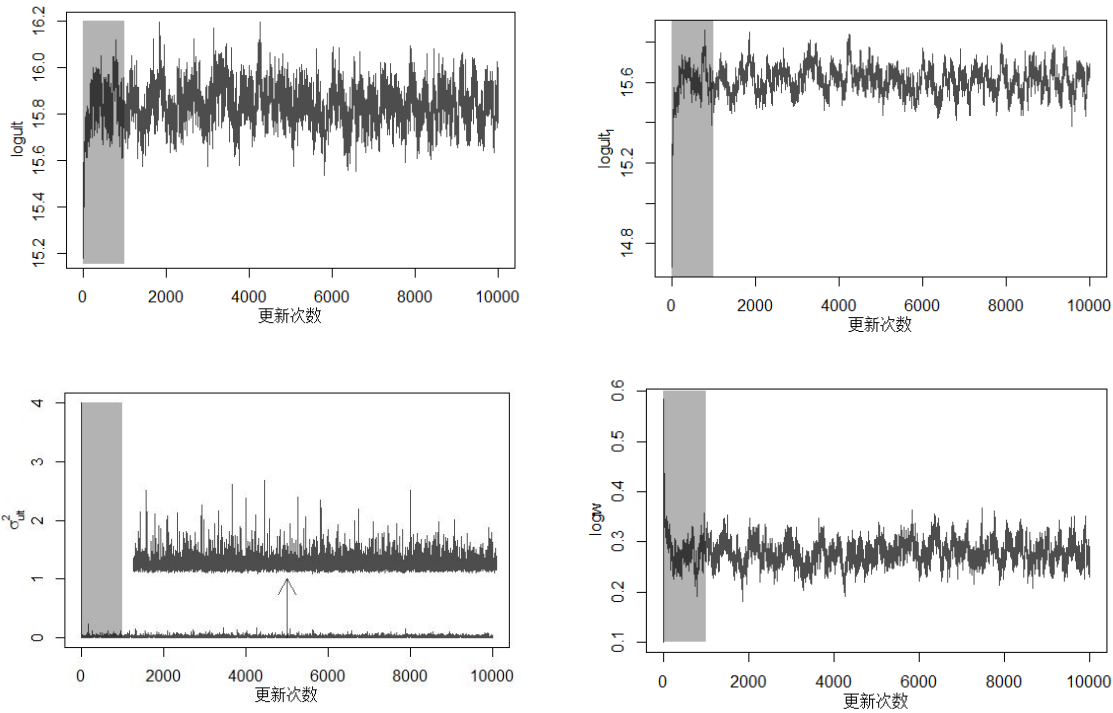


图 5.13 参数的更新轨迹

除参数样本外,在模拟中还会得到未决赔款的样本。下图所示为当不考虑尾部进展因子时,loglogistic 增长曲线模型下第 4 事故年(图 a)、第 6 事故年(图 b)、第 8 事故年(图 c)未决赔款以及总的未决赔款直方图(图 d),在每个直方图上方,我们添加了一条核密度估计曲线,直方图或核密度曲线可看做是未决赔款的预测分布。通过预测分布的统计特征值,如均值、标准差、分位数等(各图中已标出均值、5%分位数和 95%分位数等统计特征),我们不仅能够得到相应的准备金估计值,还能对未决赔款的不确定性或者说准备金风险进行度量。

<sup>①</sup> 本章 R 程序代码可从 <http://gaolei786.github.io/code/bma/> 下载。



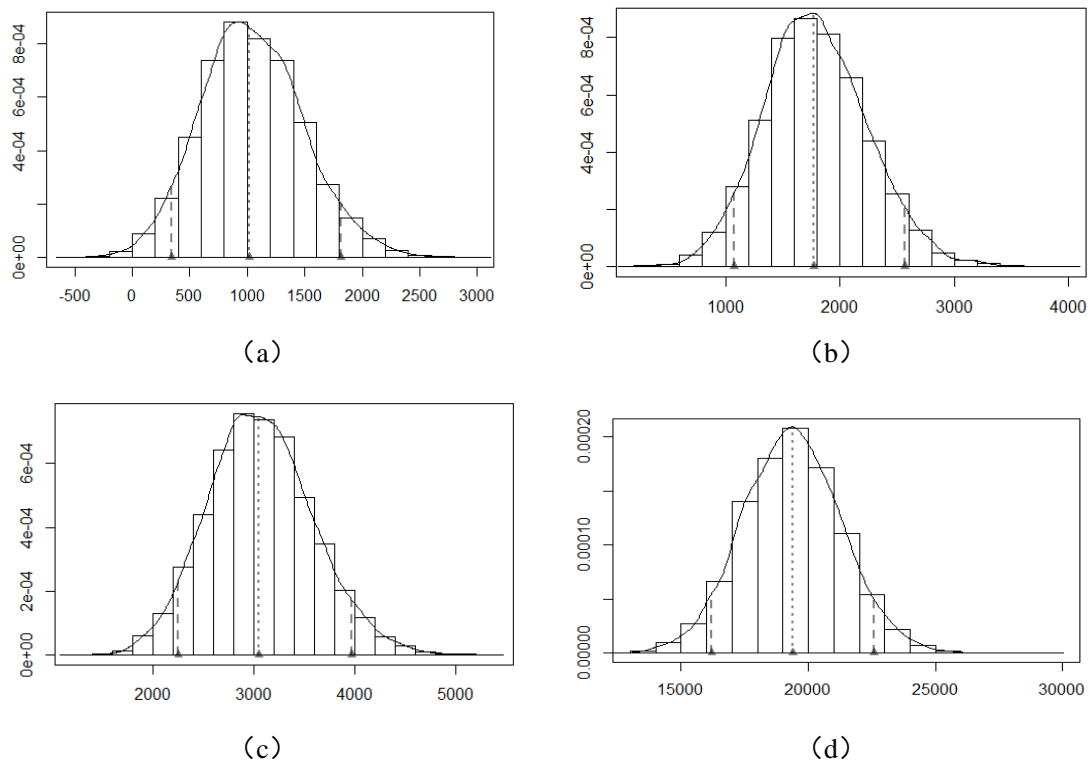


图 5.14 loglogistic 增长曲线模型下未决赔款（截尾）预测分布

表 5.5 Loglogistic 增长曲线模型下未决赔款（截尾）分布特征 单位：千元

事故年	准备金		标准差		5%分位数	中位数	95 分位数
2	115.4	94.6	423.7	71.8	-545.3	95.2	840.6
3	459.0	469.5	424.9	119.5	-212.7	445.8	1169.8
4	1042.5	709.6	445.5	131.6	339.5	1020.7	1809.6
5	1392.3	984.9	431.8	260.5	705.3	1379.8	2122.1
6	1791.8	1419.5	453.0	410.4	1074.2	1771.0	2563.4
7	2435.3	2177.6	503.8	557.8	1637.6	2418.3	3285.6
8	3067.5	3920.3	520.4	874.9	2244.3	3049.8	3966.8
9	4194.5	4279.0	515.9	971.0	3382.0	4167.5	5069.1
10	4863.0	4625.8	528.3	1363.0	4039.4	4832.4	5772.0
总计	19361.4	18680.9	1921.3	2441.4	16203.1	19351.7	22565.6

表 5.5 报告了 Loglogistic 增长曲线模型下各事故年未决赔款的统计特征值,包括均值、标准差、分位数等。其中,未决赔款的均值即为准备金估计,未决赔款的标准差衡量了未决赔款的波动程度,可看作是对准备金风险的度量。此外,表中还列出了 Mack 模型下各事故年的准备金估计和预测均方误差。总体来看,Loglogistic 增长曲线模型的准备金估计略高于 Mack 模型的结果,未决赔款的标准差低于 Mack 模型的结果,二者相差并不悬殊。值得注意的是, Mack 模型仅能给出准备金估计和预测均方误差,而通过 Loglogistic 增长曲线模型得到的信息则更为丰富,能够获得包括未决赔款均值和标准差在内的几乎所有统

计特征值（如分位数），从而更充分地刻画准备金风险。

下图所示为当考虑尾部进展因子时，loglogistic 增长曲线模型下第 4 事故年（图 a）、第 6 事故年（图 b）、第 8 事故年（图 c）未决赔款以及总的未决赔款直方图。在每个直方图上方，我们添加了一条核密度估计曲线，各图中还标出均值、5%分位数和 95%分位数等统计特征，这样就可以对未决赔款的不确定性或者说准备金估计的风险进行度量。

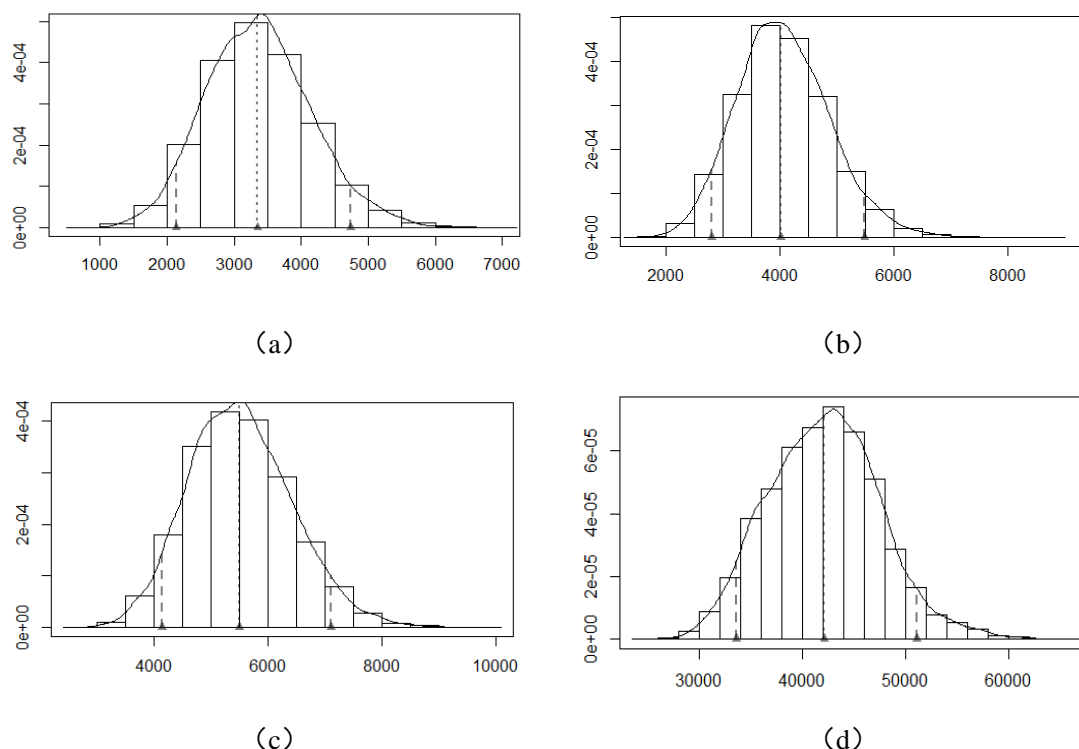


图 5.15 loglogistic 增长曲线模型下未决赔款预测分布

表 5.6 Loglogistic 增长曲线模型下未决赔款分布特征 单位：千元

事故年	准备金	标准差	5%分位数	中位数	95%分位数
1	2136.2	580.3	1224.0	2101.7	3139.3
2	2372.4	745.9	1214.1	2354.1	3635.6
3	2678.4	742.3	1523.3	2635.6	3940.0
4	3371.5	793.5	2127.9	3348.8	4737.9
5	3565.9	756.5	2386.0	3533.8	4855.8
6	4061.4	816.5	2796.9	4015.9	5483.9
7	4891.4	888.9	3504.0	4855.4	6413.3
8	5520.4	909.0	4126.8	5478.3	7086.7
9	6491.9	862.7	5153.2	6443.6	7991.6
10	7017.7	844.5	5717.6	6964.6	8477.9
总计	42107.3	5381.6	33564.2	42129.9	50997.3

表 5.6 报告了考虑尾部进展因子时，Loglogistic 增长曲线模型下各事故年未决赔款的统计特征值，包括均值、标准差、分位数等。可见，当考虑尾部进展因子时，准备金估计

值几乎是不考虑尾部进展因子时的两倍。因此，是否考虑尾部进展因子需要精算师的审慎考虑。

在这一小节，我们分两种情况讨论了在 Loglogistic 曲线模型结构下的准备金估计，即不考虑尾部进展因子时和考虑尾部进展因子时的准备金估计。类似地，我们也可以在这两种情形下，讨论在 Weibull 增长曲线模型结构下的准备金估计。在下一小节，我们将间接给出 Weibull 增长曲线模型的估计结果，所以为了节省篇幅，这里不再重复。

### 5.3.3 两个增长曲线模型的贝叶斯模型平均

Loglogistic 增长曲线模型下各参数的后验均值为：

$$\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^* = \{15.60976, 15.85468, 15.83785, 15.88560, 15.81816, \\ 15.85969, 15.93543, 15.93629, 15.87166, 15.80603\}$$

$$\log ult^* = 15.84183$$

$$\{\sigma_{ult}^2\}^* = 0.02193477$$

$$\{\sigma^2\}^* = 0.004657048$$

$$\log w^*, \log \theta^* = \{0.2775962, 1.5781060\}$$

在参数的后验均值处，Loglogistic 增长曲线模型对数先验密度的取值为：

$$\log(p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*, \log w^*, \log \theta^*)) = -22.20366$$

对数似然函数的取值为：

$$\log(p(D | \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*, \log w^*, \log \theta^*)) = 54.72542$$

对数后验密度的取值为：

$$\log(p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*, \log w^*, \log \theta^* | D)) = 42.62777$$

根据基础边际似然恒等式，Loglogistic 增长曲线模型边际似然的取值为：

$$p(D | M_1) = e^{-22.20366 + 54.72542 - 42.62777} = e^{-10.106}$$

Weibull 增长曲线模型下各参数的后验均值为：

$$\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^* = \{15.28463, 15.52554, 15.50548, 15.55135, 15.48338, \\ 15.52610, 15.60456, 15.60859, 15.54518, 15.47311\}$$

$$\log ult^* = 15.5111$$

$$\{\sigma_{ult}^2\}^* = 0.02172379$$

$$\{\sigma^2\}^* = 0.00444365$$

$$\log w^*, \log \theta^* = c(0.2377815, 1.4194950)$$

在参数的后验均值处，Weibull 增长曲线模型对数先验密度的取值为：

$$\log(p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*, \log w^*, \log \theta^*)) = -22.60809$$

对数似然函数的取值为：

$$\log(p(D | \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*, \log w^*, \log \theta^*)) = 56.53525$$

对数后验密度的取值为：

$$\log(p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*, \log w^*, \log \theta^* | D)) = 43.35839$$

根据基础边际似然恒等式，Weibull 增长曲线模型边际似然的取值为：

$$p(D | M_2) = e^{-22.20366 + 54.72542 - 42.62777} = e^{-9.431224}$$

利用 (5.6) 式可得两个备选模型的后验概率：

$$p(M_1 | D) = \frac{e^{-10.106} \times 0.5}{e^{-10.106} \times 0.5 + e^{-9.431224} \times 0.5} = 0.3374$$

$$p(M_2 | D) = \frac{e^{-9.431224} \times 0.5}{e^{-10.106} \times 0.5 + e^{-9.431224} \times 0.5} = 0.6626$$

Loglogistic 增长曲线模型的后验概率为 33.74%，Weibull 增长曲线模型的后验概率为 66.26%。虽然 Weibull 增长曲线模型比 Loglogistic 模型的后验概率略高，但是两者差异并不悬殊，这正是准备金评估模型存在不确定性 (Model Uncertainty) 的体现。在这种情况下，只挑选后验概率最大的模型 (Weibull 模型) 而完全忽视后验概率较低的模型 (Loglogistic 模型) 进行分析就有失偏颇，毕竟 Loglogistic 也具有一定的可信性 (超过 30% 的后验概率就说明了这一点)，因此，适当的做法是利用后验概率对两个模型的结果进行加权平均。

首先，在不考虑尾部进展因子情形下，利用后验概率对两种增长曲线模型的未决赔款预测分布进行加权，所得结果如下图所示。作为展示，这里只列出了第 4 事故年 (图 a)、第 6 事故年 (图 b)、第 8 事故年 (图 c) 未决赔款，以及总未决赔款 (图 d) 预测分布的加权情况。其中，短虚线表示 Loglogistic 增长曲线模型未决赔款的预测分布，点虚线表示

Weibull 增长曲线模型未决赔款的预测分布,实线则表示两种模型加权平均之后的未决赔款预测分布。从图中可以看出,两种模型下未决赔款分布的位置具有一定差异。具体而言,Loglogistic 曲线模型的未决赔款中心位置在 Weibull 曲线模型的右侧,而经过加权之后的未决赔款分布的中心位置则位于这两个模型之间,这一点在总未决赔款预测分布图 d 中表现极为明显。这表明,由 Loglogistic 曲线模型得到的准备金要大于 Weibull 模型的结果,而贝叶斯模型平均之后的准备金位于这两个模型的结果之间。

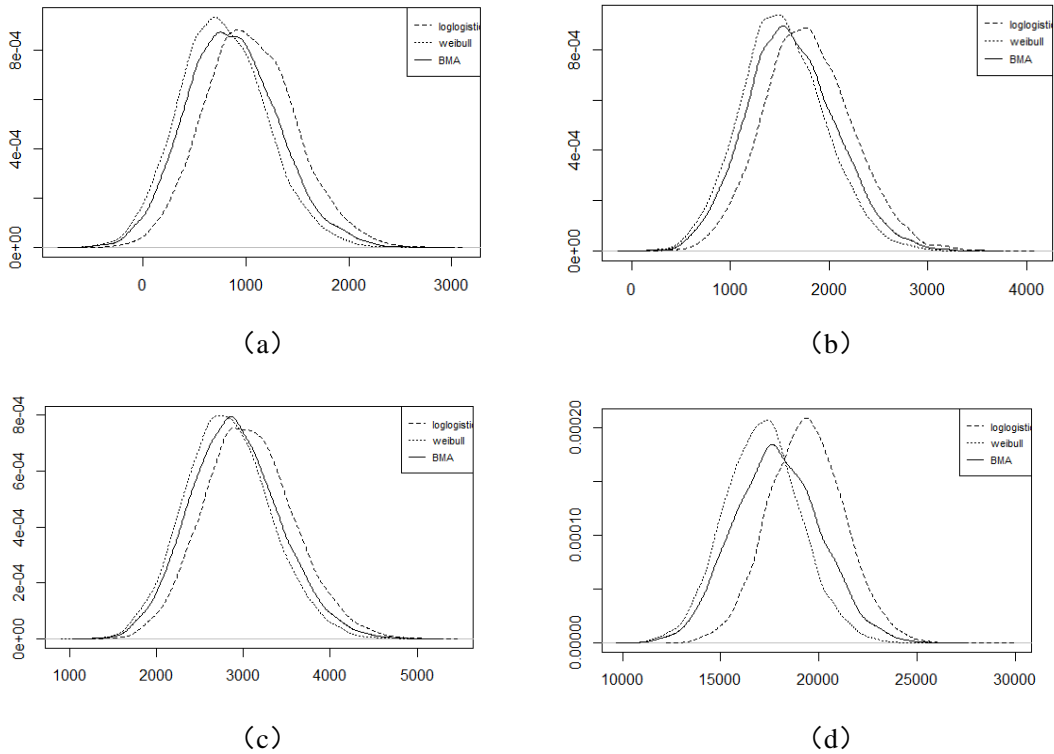


图 5.16 BMA 方法得到的未决赔款的预测分布

以上几点观察可以用数据进行验证。下表报告了不考虑尾部进展因子情形时,两个备选模型各事故年未决赔款的统计特征,以及经过贝叶斯模型平均之后的结果。可以发现,由 Loglogistic 曲线模型得到的各事故年准备金(包括总的准备金)无一例外地大于 Weibull 曲线模型的结果,而贝叶斯模型平均得到的准备金估计则位于这两个模型的结果之间,表明贝叶斯模型平均算法可以在一定程度均衡考虑每个模型的结果,也恰恰体现了贝叶斯模型平均的本质及其优势。另外,由贝叶斯模型平均方法得到的未决赔款的标准差(2191.735)大于两个备选模型的结果(Loglogistic: 1921.303; Weibull,1929.625),这正是由模型不确定性对准备金风险的影响导致的。

表 5.7 各事故年以及总未决赔款(截尾)的分布特征数据表 单位:千元

事故年	Loglogistic 增长曲线模型	Leibull 增长曲线模型	贝叶斯模型平均
-----	--------------------	----------------	---------

	准备金	标准差	准备金	标准差	准备金	标准差
2	115.4381	423.6905	-117.049	403.5073	-38.9719	426.0777
3	459.0171	424.8535	213.4151	402.928	293.762	424.2886
4	1042.546	445.4981	775.0662	423.3644	865.1856	449.0252
5	1392.26	431.8146	1139.946	409.1398	1223.715	432.0263
6	1971.84	452.0363	1534.946	431.1415	1622.288	455.5509
7	2435.347	503.804	2173.199	478.7098	2263.135	503.2318
8	3067.514	520.3893	2822.483	494.8373	2905.991	516.757
9	4194.492	515.884	3971.357	489.0373	4046.374	510.7378
10	4862.961	528.3086	4621.731	497.5556	4703.883	521.3853
总计	19361.42	1921.303	17134.5	1929.625	17893.28	2191.735

然后，在考虑尾部进展因子情形下，利用后验概率对两种增长曲线模型的未决赔款预测分布进行加权，所得结果如图 5.17 所示。这里只列出了第 4 事故年（图 a）、第 6 事故年（图 b）、第 8 事故年（图 c）未决赔款，以及总未决赔款（图 d）预测分布的加权情况。其中，短虚线表示 Loglogistic 增长曲线模型未决赔款的预测分布，点虚线表示 Weibull 增长曲线模型未决赔款的预测分布，实线则表示两种模型加权之后的未决赔款预测分布。从图中可以看出，两种模型下未决赔款分布的位置具有显著差异，具体来说，由 Loglogistic 曲线模型得到的准备金要显著大于 Weibull 模型的结果，这意味着，选择不同的模型会对最后的准备金评估造成重大影响。在这种情况下，仅考虑单个模型必然会增大风险，贝叶斯模型平均更有其必要性。正如图中所示，贝叶斯模型平均后的未决赔款分布的中心位置位于这两个模型之间，表明贝叶斯模型平均算法可以在一定程度均衡考虑每个单一模型的结果，这体现了贝叶斯模型平均的优势。

同样，上述几点观察可以用数据进行验证。下表报告了考虑尾部进展因子情形时，两个备选模型各事故年未决赔款的统计特征，以及经过贝叶斯模型平均之后的结果。可以发现，由 Loglogistic 曲线模型得到的各事故年准备金（包括总的准备金）无一例外地显著大于 Weibull 曲线模型的结果，Loglogistic 曲线模型的准备金估计（42107.31）几乎是 Weibull 曲线模型（20550.88）的两倍多。贝叶斯模型平均得到的准备金估计（27830.15）则位于这两个模型的结果之间，表明贝叶斯模型平均算法可以在一定程度均衡考虑每个模型的结果。另外，由贝叶斯模型平均方法得到的未决赔款的标准差（10921.38）大于两个备选模

型的结果 (Loglogistic: 5381.567; Weibull: 2838.919), 这是由于考虑了模型不确定性造成的。

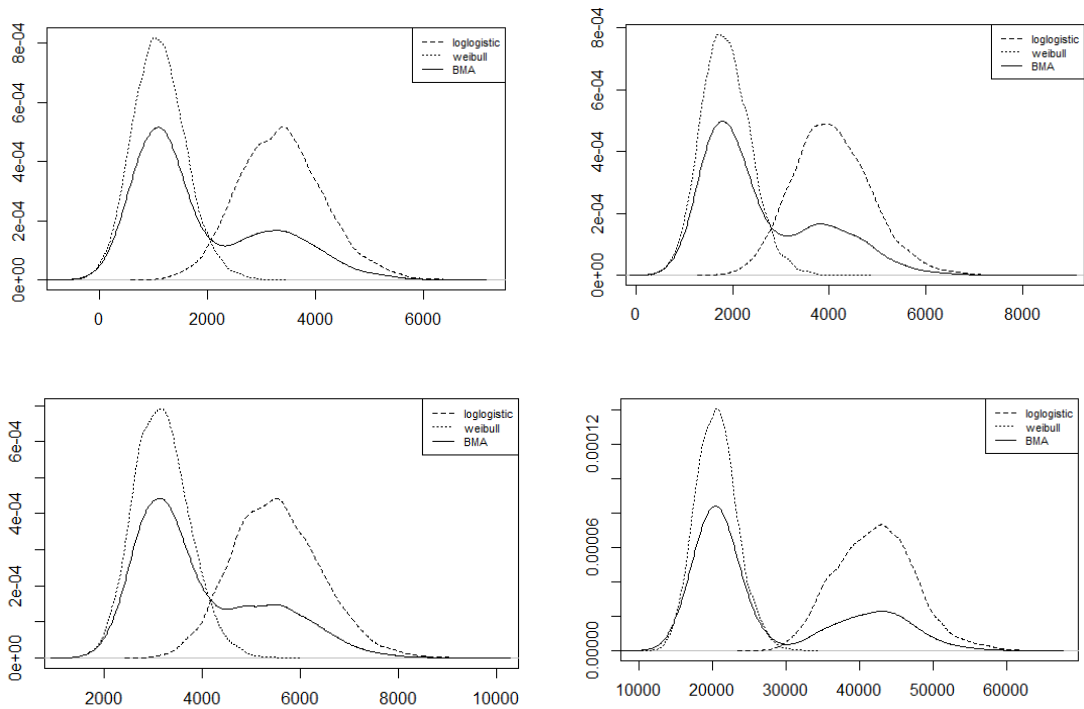


图 5.17 BMA 方法得到的未决赔款的预测分布

表 5.8 各事故年以及总未决赔款的分布特征数据表

单位: 千元

事故年	Loglogistic 增长曲线模型		Weibull 增长曲线模型		贝叶斯模型平均	
	准备金	标准差	准备金	标准差	准备金	标准差
1	2136.237	580.3215	459.1089	360.6	1090.215	908.7643
2	2372.446	745.8188	208.158	463.5225	942.5756	1175.426
3	2678.436	742.2835	531.2988	462.1979	1268.455	1169.325
4	3371.505	793.4977	1107.98	491.7428	1872.089	1237.909
5	3565.941	756.4977	1447.452	468.9227	2154.832	1150.733
6	4061.38	816.5268	1859.999	509.4264	2606.324	1212.457
7	4891.407	888.858	2529.67	557.8049	3330.624	1309.468
8	5520.369	909.0391	3174.244	569.8271	3968.971	1318.259
9	6491.92	862.7052	4301.564	549.1373	5043.066	1226.107
10	7017.633	844.478	493.403	546.1368	5623.212	1189.656
总计	42107.31	5381.567	20550.88	2838.919	27830.15	10921.38

## 5.4 本章小结

以往的研究，较多关注构建非寿险准备金评估模型，并对模型的参数和准备金进行估计，继而对准备金风险进行度量。然而，鲜有文献研究模型之间的比较，也很少有研究关注选择不同的模型可能对准备金估计乃至准备金风险产生的影响。本章研究了两种不同准备金评估模型—Loglogistic 增长曲线模型和 Weibull 增长曲线模型—的准备金估计和风险度量问题，并创新性地提出利用贝叶斯模型平均方法对两个模型的结果进行加权平均，不仅得到了综合两个模型结果的准备金估计值，而且还得到了模型不确定性视角下的准备金风险度量值。

本章研究发现，在不考虑尾部进展因子时，两种增长曲线模型所得的准备金估计结果比较接近，而考虑尾部进展因子时，两种增长曲线模型所得的准备金估计结果明显不同。因此，谨慎地对两种模型进行综合就非常重要。利用贝叶斯模型平均方法对这两模型进行分析，发现两种增长曲线模型的后验概率相差并不悬殊，表明模型不确定性确实存在，这意味着，舍弃其中一个模型而只选择单一模型并不妥当。利用模型后验概率对两模型的准备金估计结果进行加权平均，所得的准备金估计结果介于这两种模型的结果之间，这为精算师进行准备金评估提供了一种科学的模型综合方法。我们还发现，由贝叶斯模型平均方法得到的未决赔款的预测分布的离散特征，与单个模型相比，一般都较大，这体现了模型不确定性对准备金评估风险的影响。



## 第 6 章 总结与展望

### 6.1 研究成果总结

本论文主要研究成果可总结为以下几个方面：

第一，以风险为导向的偿付能力监管体系要求对保险公司的风险进行全面、精细地度量，准备金风险作为保险风险的重要组成部分，其准确计量是非寿险精算学界面临的新挑战。本文结合已有的非寿险准备金评估模型与方法，围绕四个方面的问题（非寿险一年期准备金风险度量、残差相关条件下的非寿险准备金风险度量、赔款数据相关条件下非寿险准备金风险度量、考虑模型不确定性对非寿险准备金风险的影响）逐层推进，系统地开展了非寿险准备金度量模型与方法的研究，最后得出了一些有价值的研究结论。

第二，本文研究四种情形下非寿险准备金风险的度量问题。每一章均附有实证研究，详细给出了利用 Bootstrap、MCMC 等随机模拟方法得到赔付进展结果或未决赔款的预测分布的步骤，并将随机模拟方法的结果与数理推导的解析解进行比较，发现通过随机模拟方法得到的预测分布能更全面地度量风险，将非寿险一年期准备金风险和未决赔款不确定性对比，得出非寿险一年期准备金风险更能反映保险公司面临的真实风险的结论。

第三，本文深入考虑了相关结构对非寿险准备金风险的影响，这里相关包括模型拟合残差相关和赔款数据相关。针对残差相关，本文采用可视化分析技术，展示残差相关结构，并利用多重假设检验和错误发现率控制过程进行定性统计检验，最后创新性地提出了分区域两阶段 Bootstrap 方法。针对数据相关，本文借鉴空间统计学的模型和方法，构建了既能反映赔款数据过离散特征，还能反映增量赔款相关性，特别是相邻事故年、进展年赔款数据相关性的条件自回归泊松模型，最后利用贝叶斯 MCMC 方法对参数进行估计。

第四，本文富有特色的研究是考虑模型不确定性对非寿险准备金风险的影响。本章研究了两种不同准备金评估模型—Loglogistic 增长曲线模型和 Weibull 增长曲线模型—的准备金估计和风险度量问题，并创新性地提出利用贝叶斯模型平均方法对量个模型的结果进行加权平均，不仅得到了综合两个模型结果的准备金估计值，而且还得到了考虑模型不确定性后的准备金风险度量值。

### 6.2 进一步的研究方向

本论文进一步研究方向可概括为：

第一，考虑案件数信息对非寿险准备金风险的影响。本文研究均基于赔款数据信息，

包括增量赔款数据和累计赔款数据，而忽略了案件数信息。在实际中，案件数这一信息会对准备金评估结果和准备金风险度量值产生重要影响。为此应研究设计一种准备金风险度量方法，将赔款数据信息、案件数信息考虑进来，使准备金风险的度量更加全面准确。

第二，考虑不同险种业务相关性对非寿险准备金风险的影响。本文研究均基于一组赔款流量三角形数据，这些数据来自于保险公司的一个险种业务。事实上，保险公司往往同时开展多个险种业务，这些业务之间可能具有相关性，如车辆责任保险和一般责任险中的人身伤害，两个业务线的赔款数据就具有正的相关性。为将多个险种业务相关性融入到非寿险准备金风险度量中来，不仅要理解非寿险准备金风险度量的模型与方法，还应掌握多元索赔准备金评估方法，将两者有机结合才可更好地研究相关业务情形下的非寿险准备金风险度量问题。

第三，考虑异常观测值对非寿险准备金风险的影响。本文假定赔款数据为正常数据，但在精算实务中，财务人员在记录、整理和报告赔款数据过程中，可能会存在小数点输入错位等原因导致的记录错误，导致赔款流量三角形中的某个数据明显大于或小于其他观测数据，这种数据就被称为异常观测数据。当流量三角形里含有异常观测数据时，仍然采用已有的准备金风险度量方法会导致错误的风险度量值。为此，需要设计一种稳健的准备金风险度量方法，消除异常观测值带来的影响，使准备金风险度量值接近于没有异常观测情况下的结果。

## 参考文献

- [1] 陈伟,牛霖琳. 基于贝叶斯模型平均方法的中国通货膨胀的建模及预测[J]. 金融研究, 2013, 11:15-27.
- [2] 陈希孺. 数理统计学简史[M]. 湖南教育出版社, 2002.
- [3] 段白鸽,张连增. 考虑离群值的稳健链梯法[J]. 数理统计与管理, 2015, 06:989-1006.
- [4] 段白鸽,张连增. 考虑两类赔款数据相关性的随机性准备金进展法及改进[J]. 中国管理科学, 2014, 04:9-16.
- [5] 段白鸽,张连增. 索赔准备金评估的贝叶斯非线性分层模型[J]. 山西财经大学学报, 2013, 10:20-31.
- [6] 段白鸽,张连增. 索赔准备金评估的非线性分层增长曲线模型研究[J]. 财经理论与实践, 2013, 04:23-29.
- [7] 段白鸽. 贝叶斯非线性分层模型在多元索赔准备金评估中的应用[J]. 数量经济技术经济研究, 2014, 03:148-161.
- [8] 段白鸽. 非寿险随机性索赔准备金评估统计模型与方法[D]. 南开大学, 2013.
- [9] 段白鸽. 非寿险索赔准备金评估随机性模型与方法:文献述评[J]. 保险研究, 2013, 08:66-77.
- [10] 段白鸽. 基于相依结构的多元索赔准备金评估随机性方法研究评述[J]. 保险研究, 2014, 09:116-127.
- [11] 高丽君. 基于贝叶斯模型平均生存模型的中小企业信用风险估计[J]. 中国管理科学, 2012, S1:327-331.
- [12] 郭涛. 基于贝叶斯统计的未决赔款准备金预测研究[D]. 天津财经大学, 2008.
- [13] 李明明. 二阶段 GLMM 在预测未决赔款准备金中的应用[D]. 云南财经大学, 2013.
- [14] 梁晴. 基于 Mack 理论的准备金预测衰减模型[D]. 天津财经大学, 2010.
- [15] 梁忠民,戴荣,王军,余钟波. 基于贝叶斯模型平均理论的水文模型合成预报研究[J]. 水力发电学报, 2010, 02:114-118.
- [16] 刘乐平,高磊,丁东洋. 残差相关条件下非寿险准备金风险分析[J]. 统计研究, 2015, 10:82-91.
- [17] 刘乐平,高磊,卢志义. 贝叶斯身世之谜——写在贝叶斯定理发表 250 周年之际[J]. 统计研究, 2013, 12:3-9.
- [18] 刘乐平,高磊,杨娜. MCMC 方法的发展与现代贝叶斯的复兴——纪念贝叶斯定理发现 250 周年[J]. 统计与信息论坛, 2014, 02:3-11.
- [19] 刘乐平,高磊,杨娜. Solvency II 框架下准备金风险及其随机模拟方法[A]. 北京大学中国保险与社会保障研究中心 (CCISSR). 建立社会公平保障体系与经济社会发展——北大赛瑟 (CCISSR) 论坛文集·2013[C]. 北京大学中国保险与社会保障研究中心 (CCISSR) :, 2013:14.
- [20] 刘乐平,刘旭,逯敏. 保险公司的全面风险管理——基于风险偏好度量视角[A]. 北京大学中国保险与社会保障研究中心 (CCISSR). 十二五·新挑战:经济社会综合风险管理——北大赛瑟 (CCISSR) 论坛文集·2011[C]. 北京大学中国保险与社会保障研究中心 (CCISSR) :, 2011:17.
- [21] 刘乐平,袁卫,张琅. 保险公司未决赔款准备金的稳健贝叶斯估计[J]. 数量经济技术经济研究, 2006, 07:82-89.
- [22] 刘乐平,袁卫. 未决赔款准备金估计方法的最新进展[J]. 保险研

- 究, 2002, 11:47-49.
- [23] 刘乐平, 袁卫. 现代 Bayes 方法在精算学中的应用及展望 [J]. 统计研究, 2002, 08:45-49.
- [24] 刘乐平, 袁卫. 现代贝叶斯分析与现代统计推断 [J]. 经济理论与经济管理, 2004, 06:64-69.
- [25] 刘乐平, 张龙, 蔡正高. 多重假设检验及其在经济计量中的应用 [J]. 统计研究, 2007, 04:26-30.
- [26] 刘乐平, 张美英, 李姣娇. 基于 WinBUGS 软件的贝叶斯计量经济学 [J]. 东华理工学院学报(社会科学版), 2007, 02:101-107.
- [27] 刘新红, 孟生旺. 基于藤 Copula 的 GAMLSS 模型与非寿险准备金评估 [A]. 中国系统工程学会. 中国系统工程学会第十八届学术年会论文集——A10 系统工程方法在金融、投资、保险业等领域的研究 [C]. 中国系统工程学会:, 2014:2.
- [28] 卢志义, 刘乐平, 陈丽珍. 基于同单调理论的 IBNR 准备金估计的随机界 [J]. 数学的实践与认识, 2015, 02:60-67.
- [29] 卢志义, 刘乐平, 张慧. 链梯法中进展因子估计的数学规划法 [J]. 数学的实践与认识, 2015, 05:249-255.
- [30] 卢志义, 刘乐平. 非寿险业务未决赔款准备金的两阶段广义线性模型估计 [J]. 数理统计与管理, 2008, 01:23-29.
- [31] 卢志义, 刘乐平. 广义线性模型在非寿险精算中的应用及其研究进展 [J]. 统计与信息论坛, 2007, 04:26-31.
- [32] 卢志义, 刘乐平. 折现的未决赔款准备金估计的随机逼近 [J]. 数学的实践与认识, 2010, 06:1-8.
- [33] 卢志义. 基于广义线性模型的损失准备金估计方法研究 [D]. 天津财经大学, 2008.
- [34] 孟生旺, 王明高. 非寿险未决赔款准备金评估的增长曲线模型 [J]. 经济管理, 2014, 10:108-116.
- [35] 孟生旺. 未决赔款准备金评估模型的比较研究 [J]. 统计与信息论坛, 2007, 05:5-9.
- [36] 屈燕, 韩松. 建设中国金融保险“软实力”——访中国保险监督管理委员会副主席、偿二代建设领导小组副组长陈文辉 [J]. 当代金融家, 2015, 08:25-31+24.
- [37] 司明, 孙大超. 发达国家主权债务危机成因分析及启示——基于贝叶斯模型平均方法的实证研究 [J]. 中南财经政法大学学报, 2013, 4: 012.
- [38] 宋巨生, 郑玮, 吴苹. 非寿险未决赔款准备金的选取模型 [J]. 统计与决策, 2015, 08:55-58.
- [39] 宋巨生, 郑玮, 吴苹. 基于 B-F 理论的非寿险未决赔款准备金选取模型研究 [J]. 统计与决策.
- [40] 田建强, 刘志新. 包含央行预期方式的时变泰勒规则——基于贝叶斯模型平均方法 [J]. 管理评论, 2014, 03:61-69.
- [41] 王华伟, 高军, 吴海桥. 基于贝叶斯模型平均的航空发动机可靠性分析 [J]. 航空动力学报, 2014, 29(2): 305-313.
- [42] 王亮, 刘金全. 中国经济增长的决定因素分析——基于贝叶斯模型平均 (BMA) 方法的实证研究 [J]. 统计与信息论坛, 2010, 25(9): 3-7.
- [43] 王明高, 王文娟. 自举法在赔款准备金评估中的应用探讨 [J]. 科技信息, 2013, 04:59-61.
- [44] 王明高. 基于广义线性自举法赔款准备金模型的应用 [J]. 统计与决策, 2014, 12:72-75.

- [45] 王莹. 非寿险准备金估计的风险区间方法研究[D]. 天津财经大学, 2011.
- [46] 闫春, 陈祥辉, 刘新民, 邱艺伟. 非寿险业务终止下的未决赔款准备金评估方法比较分析[J]. 数学的实践与认识, 2015, 07:304-310.
- [47] 闫春, 邱艺伟, 刘新民, 陈祥辉. 基于核光滑的随机性准备金进展法[J]. 统计与决策, 2015, 14:75-77.
- [48] 闫春, 张良玉. 非寿险未决赔款准备金两阶段广义线性模型的探讨[J]. 统计与决策, 2014, 01:78-80.
- [49] 闫春, 张良玉. 非寿险未决赔款准备金评估的广义线性模型平滑性改进[J]. 系统工程, 2014, 01:59-64.
- [50] 张连增, 段白鸽. 基于 Bootstrap 方法的随机性准备金进展法及 R 实现[J]. 山西财经大学学报, 2011, 04:18-24.
- [51] 张连增, 段白鸽. 基于 GLM 的未决赔款准备金评估的随机性链梯法[J]. 财经理论与实践, 2012, 01:22-28.
- [52] 张连增, 段白鸽. 基于非参数 Bootstrap 方法的随机性链梯法及 R 实现[J]. 统计与决策, 2012, 21:17-23.
- [53] 张连增, 段白鸽. 基于已决赔款与已报案赔款相关性的随机性准备金进展法[J]. 管理评论, 2013, 05:155-166.
- [54] 张连增, 段白鸽. 损失进展过程建模与随机性索赔准备金评估[J]. 山西财经大学学报, 2012, 11:21-32.
- [55] 张连增, 段白鸽. 未决赔款准备金评估的 Mack 模型及其预测均方误差的实现[J]. 统计与决策, 2011, 13:20-23.
- [56] 张连增, 段白鸽. 未决赔款准备金评估的对数正态模型及其预测分布的 Bootstrap 实现[J]. 数学的实践与认识, 2011, 24:33-43.
- [57] 张连增, 段白鸽. 未决赔款准备金评估的随机性 Munich 链梯法[J]. 数理统计与管理, 2012, 05:880-897.
- [58] 张连增, 段白鸽. 准备金评估的随机性 Munich 链梯法及其改进——基于 Bootstrap 方法的实证分析[J]. 数量经济技术经济研究, 2011, 11:98-111.
- [59] 张连增, 刘怡. 欧盟保险偿付能力监管标准 II 框架下的技术准备金估计[J]. 南京审计学院学报, 2013, 02:20-28.
- [60] 张新雨, 邹国华. 模型平均方法及其在预测中的应用[J]. 统计研究, 2011, 28(6): 97-102.
- [61] 张志杰, 彭文祥, 周艺彪, 等. 贝叶斯模型平均法的基本原理及其在 logistic 回归中的应用实例[J]. 中国卫生统计, 2008, 24(5): 467-471.
- [62] 朱慧明, 王彦红, 曾惠芳. 基于逆跳 MCMC 的贝叶斯分位自回归模型研究[J]. 统计与信息论坛, 2010, 01:9-14.
- [63] 中国保险监督管理委员会,《保险公司偿付能力监管规则(1-17号)》(保监发[2015]22号) [M], 2015
- [64] Andrieu C, De Freitas N, Doucet A, et al. An introduction to MCMC for machine learning[J]. Machine learning, 2003, 50(1-2): 5-43.
- [65] Annest A, Bumgarner R E, Raftery A E, et al. Iterative bayesian model averaging: A method for the application of survival analysis to high-dimensional microarray data[J]. BMC bioinformatics, 2009, 10(1): 72.
- [66] Ashe F. An essay at measuring the variance of estimates of outstanding claim payments[J]. ASTIN Bulletin S, 1986, 16: 99-113.

- [67] Barnard G A. New methods of quality control[J]. Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General), 1963: 255-258.
- [68] Bates J M, Granger C W J. The combination of forecasts[J]. Or, 1969: 451-468.
- [69] Benjamini Y, Hochberg Y. Controlling the false discovery rate: a practical and powerful approach to multiple testing[J]. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 1995: 289-300.
- [70] Besag J, Kooperberg C. On conditional and intrinsic autoregressions[J]. Biometrika, 1995, 82(4): 733-746.
- [71] Besag J. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems[J]. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 1974: 192-236.
- [72] Bobb J F, Dominici F, Peng R D. A Bayesian model averaging approach for estimating the relative risk of mortality associated with heat waves in 105 US cities[J]. Biometrics, 2011, 67(4): 1605-1616.
- [73] Breiman L. Statistical modeling: The two cultures (with comments and a rejoinder by the author)[J]. Statistical Science, 2001, 16(3): 199-231.
- [74] Brook D. On the distinction between the conditional probability and the joint probability approaches in the specification of nearest-neighbour systems[J]. Biometrika, 1964: 481-483.
- [75] Chen M H, Shao Q M. On Monte Carlo methods for estimating ratios of normalizing constants[J]. The Annals of Statistics, 1997, 25(4): 1563-1594.
- [76] Chib S, Jeliazkov I. Marginal likelihood from the Metropolis–Hastings output[J]. Journal of the American Statistical Association, 2001, 96(453): 270-281.
- [77] Chib S. Marginal likelihood from the Gibbs output[J]. Journal of the American Statistical Association, 1995, 90(432): 1313-1321.
- [78] Clyde M, George E I. Flexible empirical Bayes estimation for wavelets[J]. Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology), 2000, 62(4): 681-698.
- [79] Clyde M, George E I. Model uncertainty[J]. Statistical science, 2004: 81-94.
- [80] Clyde M. Discussion of “The practical implementation of Bayesian model selection.” In Model Selection, 2001, 117-124.
- [81] De Alba E, Nieto-Barajas L E. Claims reserving: a correlated Bayesian model[J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 43(3): 368-376.
- [82] De Jong P. Forecasting runoff triangles[J]. North American Actuarial Journal, 2006, 10(2): 28-38.
- [83] Diers D., 2009 , Stochastic re-reserving in multi-year internal models—An approach based on simulations[C] , Presentado a Astin Colloquium.
- [84] Efron B, Tibshirani R J. An introduction to the bootstrap[M]. CRC press, 1994.
- [85] Eicher T S, Helfman L, Lenkoski A. Robust FDI determinants: Bayesian model averaging in the presence of selection bias[J]. Journal of Macroeconomics, 2012, 34(3): 637-651.
- [86] England P D, Verrall R J. Predictive distributions of outstanding liabilities in general insurance[J]. Annals of Actuarial Science, 2006, 1(02): 221-270.
- [87] England P, Verrall R. Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving[J]. Insurance: mathematics and economics, 1999, 25(3): 281-293.
- [88] England P, Verrall R. Predictive distributions of outstanding liabilities in general insurance[J]. Annals of Actuarial Science, 2007, 1(02): 221-270.

- [89] England P, Verrall R. Stochastic claims reserving in general insurance[J]. *British Actuarial Journal*, 2002, 8(03): 443-518.
- [90] Fernandez C, Ley E, Steel M F J. Model uncertainty in cross - country growth regressions[J]. *Journal of applied Econometrics*, 2001, 16(5): 563-576.
- [91] Gelfand A E, Dey D K. Bayesian model choice: asymptotics and exact calculations[J]. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1994: 501-514.
- [92] Gelfand, A. and Smith, A. Sampling based approaches to calculating marginal densities[J]. *Journal of the American Statistical Association*.1990(85):398–409.
- [93] Gelman A, Meng X L. Simulating normalizing constants: From importance sampling to bridge sampling to path sampling[J]. *Statistical science*, 1998: 163-185.
- [94] Geman, S. and Geman, D. Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images[J]. *IEEE,Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1984(6),721:741.
- [95] George E I, Foster D P. Calibration and empirical Bayes variable selection[J]. *Biometrika*, 2000, 87(4): 731-747.
- [96] George E I, McCulloch R E. Variable selection via Gibbs sampling[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1993, 88(423): 881-889.
- [97] Gneiting T, Raftery A E. Weather forecasting with ensemble methods[J]. *Science*, 2005, 310(5746): 248-249.
- [98] Green, P. Reversible jump MCMC computation and Bayesian model determination. *Biometrika*, 1995(82):711–732.
- [99] Hansen M H, Yu B. Model selection and the principle of minimum description length[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 2001, 96(454): 746-774.
- [100] Happ S, Merz M, Wüthrich M V., 2012, Claims development result in the paid-incurred chain reserving method[J] , *Insurance: Mathematics and Economics*, 51(1), 66~72.
- [101] Hastings, W. K.. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their Applications[J]. *Biometrika*.1970(57): 97–109.
- [102] Hobert J P, Jones G L, Presnell B, et al. On the applicability of regenerative simulation in Markov chain Monte Carlo[J]. *Biometrika*, 2002, 89(4): 731-743.
- [103] Hoeting J A, Madigan D, Raftery A E, et al. Bayesian model averaging: a tutorial[J]. *Statistical science*, 1999: 382-401.
- [104] Kass R E, Wasserman L. A reference Bayesian test for nested hypotheses and its relationship to the Schwarz criterion[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1995, 90(431): 928-934.
- [105] Kremer E. The correlated chain-ladder method for reserving in case of correlated claims developments[J]. *Bl?tter der DGVM*, 2005, 27(2): 315-322.
- [106] Leamer E E. Specification searches: Ad hoc inference with nonexperimental data[M]. John Wiley & Sons Inc, 1978.
- [107] Li H, Calder C A, Cressie N. Beyond Moran's I: testing for spatial dependence based on the spatial autoregressive model[J]. *Geographical Analysis*, 2007, 39(4): 357-375.
- [108] Mack T. Distribution-free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates[J]. *Astin Bulletin*, 1993, 23(02): 213-225.
- [109] Madigan D, Raftery A E. Model selection and accounting for model uncertainty in graphical models using Occam's window[J]. *Journal of the American Statistical*

- Association, 1994, 89(428): 1535-1546.
- [110] Madigan D, York J, Allard D. Bayesian graphical models for discrete data[J]. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, 1995: 215-232.
  - [111] Meng X L, Wong W H. Simulating ratios of normalizing constants via a simple identity: a theoretical exploration[J]. *Statistica Sinica*, 1996, 6(4): 831-860.
  - [112] Merz M, Wüthrich M V. Paid-incurred chain claims reserving method[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2010, 46(3): 568-579.
  - [113] Merz M, Wüthrich M V. Prediction error of the expected claims development result in the chain ladder method[J]. *Bulletin of Swiss Association of Actuaries*, 2007, 1: 117-137.
  - [114] Merz, M., Wüthrich, M.V., 2008, Modelling the claims development result for solvency purposes[C], CAS E-Forum, 542~568.
  - [115] Metropolis, N., Rosenbluth, A. W., Rosenbluth, M. N., et al. Equations of state calculations by fast computing machines[J]. *Journal of Chemical Physics*, 1953(21), 1087–1091.
  - [116] Metropolis, N., Ulam, S. The Monte Carlo method[J]. *Journal of the American Statistical Association*. 1949(44).335–341.
  - [117] Mitchell T J, Beauchamp J J. Bayesian variable selection in linear regression[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1988, 83(404): 1023-1032.
  - [118] Newton M A, Raftery A E. Approximate Bayesian inference with the weighted likelihood bootstrap[J]. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1994: 3-48.
  - [119] Ntzoufras I, Katsis A, Karlis D. Bayesian assessment of the distribution of insurance claim counts using reversible jump MCMC[J]. *North American Actuarial Journal*, 2005, 9(3): 90-108.
  - [120] Ohlsson E, Lauzenings J., 2009, The one-year non-life insurance risk[J] , *Insurance: Mathematics and Economics*, 45(2), 203~208.
  - [121] Peskun, P. H. Optimum Monte-Carlo sampling using Markov chains[J]. *Biometrika*, 1973(60), 607–612.
  - [122] Raftery A E, Kárny M, Ettler P. Online prediction under model uncertainty via dynamic model averaging: Application to a cold rolling mill[J]. *Technometrics*, 2010, 52(1): 52-66.
  - [123] Raftery A E. Approximate Bayes factors for generalized linear models[M]. University of Washington, Department of Statistics, 1988.
  - [124] Renshaw A E, Verrall R J. A stochastic model underlying the chain-ladder technique[J]. *British Actuarial Journal*, 1998, 4(04): 903-923.
  - [125] Robbin I., 2012, A Practical Way to Estimate One-year Reserve Risk[C]. *Casualty Actuarial Society E-Forum*, Summer.
  - [126] Robert C Y. Market Value Margin calculations under the Cost of Capital approach within a Bayesian chain ladder framework[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2013, 53(1): 216-229.
  - [127] Robert, C. Casella, G. A Short History of Markov Chain Monte Carlo: Subjective Recollections from Incomplete Data[J]. *Statistical Science*. 2011(26).102-115.
  - [128] Roberts G O, Rosenthal J S. Coupling and ergodicity of adaptive Markov chain Monte Carlo algorithms[J]. *Journal of applied probability*, 2007: 458-475.
  - [129] Roberts H V. Probabilistic prediction[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1965, 60(309): 50-62.



- [130] Spiegelhalter D J, Best N G, Carlin B P, et al. Bayesian measures of model complexity and fit[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 2002, 64(4): 583-639.
- [131] Spiegelhalter D, Thomas A, Best N, et al. WinBUGS user manual[J]. 2003.
- [132] Tanner, M. and Wong, W. The calculation of posterior distributions by data augmentation. *Journal of the American Statistical Association*[J].1987(82):528–550.
- [133] Taylor G C. Regression models in claims analysis I: theory [J]. *PCAS LXXIV*, 1987.
- [134] Tierney L, Kadane J B. Accurate approximations for posterior moments and marginal densities[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1986, 81(393): 82-86.
- [135] Verrall R J, Wüthrich M V. Reversible jump Markov chain Monte Carlo method for parameter reduction in claims reserving[J]. *North American Actuarial Journal*, 2012, 16(2): 240-259.
- [136] Verrall R. Claims reserving and generalised additive models[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1996, 19(1): 31-43.
- [137] Volinsky C T, Madigan D, Raftery A E, et al. Bayesian model averaging in proportional hazard models: assessing the risk of a stroke[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 1997, 46(4): 433-448.
- [138] Wasserman L. Asymptotic inference for mixture models by using data - dependent priors[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, 2000, 62(1): 159-180.
- [139] Wright J H. Bayesian model averaging and exchange rate forecasts[J]. *Journal of Econometrics*, 2008, 146(2): 329-341.
- [140] Wright J H. Forecasting US inflation by Bayesian model averaging[J]. *Journal of Forecasting*, 2009, 28(2): 131-144.
- [141] Wüthrich M V, Merz M, Lysenko N. Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method[J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2009, 2009(1): 63-84.
- [142] Wüthrich M V, Merz M. *Stochastic claims reserving methods in insurance*[M]. John Wiley & Sons, 2008.
- [143] Wüthrich M V.Challenges with Non-informative Gamma Priors in the Bayesian Over-dispersed Poisson Reserving Model [J] .*Insurance: Mathematics and Economics*, 2013, 52(2): 352-358.
- [144] Zellner A. On assessing prior distributions and Bayesian regression analysis with g-prior distributions[J]. *Bayesian inference and decision techniques: Essays in Honor of Bruno De Finetti*, 1986, 6: 233-243.
- [145] Zhang Y, Dukic V, Guszczka J. A Bayesian non - linear model for forecasting insurance loss payments[J]. *Journal of the Royal Statistical Society: Series A (Statistics in Society)*, 2012, 175(2): 637-656.

## 附录

### 附录 A MCMC 方法直观实例

MCMC 方法实质上是利用马尔可夫链进行蒙特卡洛模拟。它可以分解成两个 MC：前一个 MC 是马尔可夫链 (Markov Chain)，后一个 MC 是蒙特卡洛方法 (Monte Carlo)。我们按照蒙特卡洛方法、马尔可夫链和 Metropolis-Hastings 算法的次序来介绍 MCMC 方法的直观性实例。

#### (1) 蒙特卡洛方法 (Monte Carlo) : 圆周率 $\pi$ 的估计

一般来说，蒙特卡洛方法可以粗略地分成两类：一类是所求解的问题本身具有内在的随机性，借助计算机的运算能力可以直接模拟这种随机的过程。例如在核物理研究中，分析中子在反应堆中的传输过程。中子与原子核作用受到量子力学规律的制约，人们只能知道它们相互作用发生的概率，却无法准确获得中子与原子核作用时的位置以及裂变产生的新中子的行进速率和方向。科学家依据其概率进行随机抽样得到裂变位置、速度和方向，这样模拟大量中子的行为后，经过统计就能获得中子传输的范围，以此作为反应堆设计的依据。

蒙特卡洛方法另一种类型是所求解问题可以转化为某种随机分布的数字特征值，比如随机事件出现的概率，或者随机变量的期望值。通过随机抽样的方法，以随机事件出现的频率估计其概率，或者以样本的数字特征估算随机变量的数字特征，并将其作为问题的解。这种方法多用于求解复杂的多维积分问题。：

例如，假设我们要计算一个不规则图形的面积，那么图形的不规则程度和分析性计算（比如，积分）的复杂程度是成正比的，与利用定积分方法计算不规则图形的面积的方法（任意细分后求和再取极限得到精确值）不同。蒙特卡洛方法基于这样的简单直观思路：假想你有一袋豆子，把豆子均匀地朝这个图形上撒，然后数这个图形之中有多少颗豆子，这个豆子的数目就近似代表图形的面积。当你的豆子越小，撒的越多的时候，结果就越精确。借助计算机程序可以生成大量均匀分布坐标点（代替豆子），然后统计出图形内的点数，通过它们占总点数的比例和坐标点生成范围的面积就可以求出图形面积<sup>①</sup>。

利用蒙特卡洛方法，可以非常简便的近似计算圆周率  $\pi$ ：在一个边长为单位 1 的正方形内，画出一个半径为 1 的 1/4 圆，如图 2.1。

---

<sup>①</sup> 程序代码网址：<http://gaolei786.github.io/code/mcmc/>

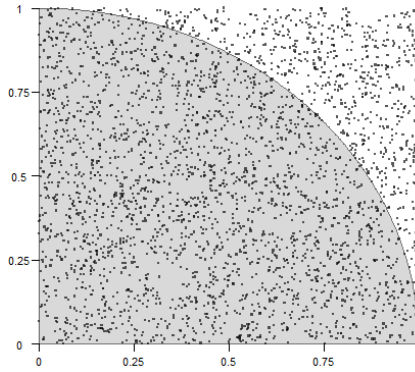


图 A.1 利用蒙特卡洛方法计算圆周率

向正方形内随机投点，设总投点数为  $N$ ，统计在圆内的点数，用  $n$  表示。则  $n$  与总点数  $N$  的比值就近似等于  $1/4$  圆的面积 ( $\pi/4$ ) 和正方形面积 (1) 之比，即  $\pi/4$ ，所以  $\pi$  约等于  $4n/N$ 。

我们让计算机来模拟上述随机投点过程。首先，每次随机生成两个服从均匀分布的 0 到 1 之间的随机数，设为  $x$  和  $y$ ，分别以这两个随机数  $x$  和  $y$  为横纵坐标，就得到了图中的一个随机投点。然后，判断这个点是否在圆内，固定  $x$ ，只需判别  $y$  是否小于或等于  $\sqrt{1-x^2}$  即可。最后，生成  $N$  个这样的随机点，加总圆内的点的总数  $n$ ，计算  $4n/N$  即可。当随机点  $N$  取得越大时，其结果越接近于圆周率（当投点达到 3 万次时，用蒙特卡洛方法可以得到  $\pi$  约等于 3.1436）。

## (2) 马尔可夫链 (Markov Chain) : 股市的表现

理解了蒙特卡洛方法的基本思路，我们再看马尔可夫链及其平稳分布的相关理论。

马尔可夫链（以下简称马氏链）的定义如下：

$$P(X_{t+1} = x | X_t, X_{t-1}, \dots) = P(X_{t+1} | X_t)$$

简单来说，即马氏链的下一个状态只依赖于当前状态，而与已经过去的状态没有关系。它是介于独立和相关之间的一种理想形式，例如，在研究时间序列时，为了便于分析，我们希望昨天、今天和明天表示的三种随机状态（或变量）完全独立，但实际上可能它们完全相关，变量之间相互独立太理想，完全相关又太复杂，马氏链进行了简化，假设明天只与今天相关，而与昨天无关（独立），换句话说，即在马氏链过程中，在给定当前知识或信息的情况下，只有当前的状态用来预测将来，过去（即当前以前的历史状态）对于预测将来（即当前以后的未来状态）是无关的。

下面以来自 wikipedia 的例子来说明马氏链及其平稳性：假设股票市场在一周内的表现

有三种可能状态：熊市（bear market）——状态 1、牛市（bull market）——状态 2 和平衡市（stagnant market）——状态 3。股市行情的转化如图 A.2 所示。

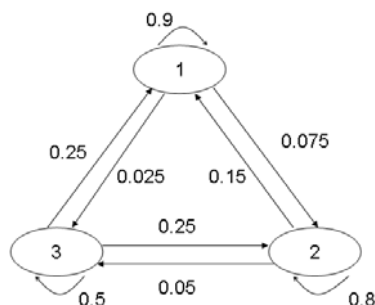


图 A.2 马氏链三种状态转移示意

由图 A.2 可见，如果当前股市为牛市，则下周为熊市的概率为 7.5%，为平衡市的概率为 2.5%，依然为牛市的概率为 90%，其他行情转化与之类似，则该马氏链的一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.075 & 0.025 \\ 0.15 & 0.8 & 0.05 \\ 0.25 & 0.25 & 0.5 \end{bmatrix}$$

我们考虑三种初始情况：当前行情为牛市、当前行情为熊市和当前行情为平衡市，它们对应的初始概率分布为： $\pi_0 = (1,0,0)$ 、 $\pi_0 = (0,1,0)$  和  $\pi_0 = (0,0,1)$ 。分析在这三种情况下股市行情在未来 30 个星期之内的转移变化情况，如图 A.3。

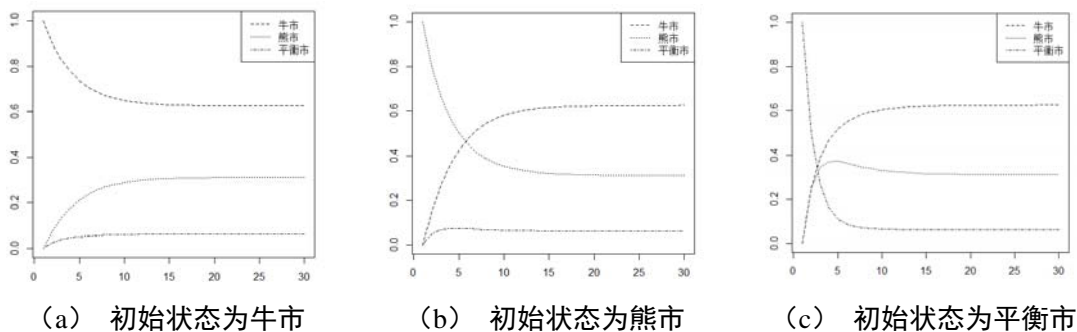


图 A.3 马氏链的平稳分布

我们发现，从第 20 周开始，三种情况下分布都开始收敛。最为奇特的是，不论初始状态是三种行情中的哪一种，最终都会收敛到平稳概率分布  $\pi = (0.625, 0.312, 0.063)$ ，也就是说，收敛行为与初始状态无关，收敛行为主要是由概率转移矩阵  $P$  决定的。

所有的 MCMC 方法均以马氏链定理为理论基础。根据马氏链定理，满足一定条件的马氏链的转移序列会形成一个具有平稳分布的样本，一个自然的想法是，如果我们想获得

某个分布（称为目标分布）的样本，我们是不是可以设计一个马氏链（其平稳分布为目标分布），然后采集这个马氏链的转移序列来作为目标分布的随机样本呢？答案是肯定的！

### (3) Metropol-Hastings (M-H) 算法:“千岛湖植物考察”

为了更加生动形象地说明 Metropol-Hastings (M-H) 算法，我们用“千岛湖植物考察<sup>①</sup>”为例来进行说明。

某旅游风景区“千岛湖”由大大小小上千个岛组成，湖面开阔，一碧万顷，岛屿棋布；大岛如山，小岛如船，个个清脆欲滴，像一块块半浸在湖中的碧玉。千岛湖风景区植物种类非常丰富，一位植物学家要去各小岛进行植物考察研究。他考察的时间安排是依据各岛上植物的种类数来确定，植物种类数多的岛屿考察时间长，植物种类数少的岛屿的考察时间短。

但是，考察之前，植物学家并不清楚各个岛的植物种类数，甚至不知道一共有多少个岛。所以他不能事先确定留在每一个岛上的天数，也无法得知在各岛考察时间占总考察时间的比率——考察时间分布。如何帮助这位植物学家安排在各岛的行程路线和考察时间呢？为了用图形进行直观介绍，我们将岛屿简化为 9 个，并假设岛屿一字排开（如图 A.4 中的 a），植物学家来到某一个岛后，不仅可以问该岛的管理者岛上的植物种类数，还可以问到其相邻岛的植物种类数。

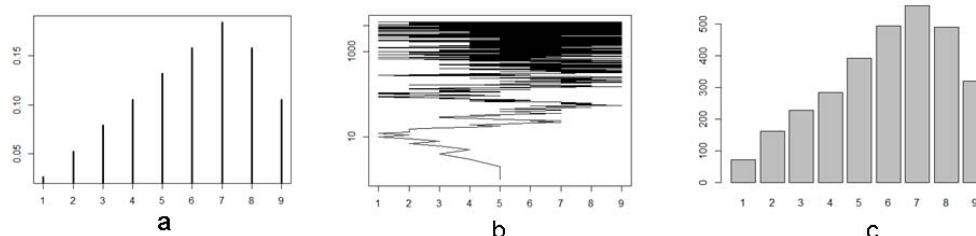


图 A.4 a:目标分布; b:行动轨迹; c:频数分布

精通 MCMC 的统计学者向植物学家建议用 M-H 算法的思想，通过“两步随机试探法”来决定他的考察路线和停留时间。植物学家到达某个岛后，由于岛是一字排开，所以他面临三种选择（三个状态）：一是继续停留在岛上（保持原状态），二是到临近左面岛屿（转移到前状态），三是到临近右面岛屿（转移到后状态）。这三种状态可以转化为两种随机选择：一是去或留，二是左或右。但 M-H 算法突破常理，用“逆向思维”来确定选择过程，先确定左或右，再决定去或留（究其原因，可能是先基于左或右岛的情况，再与当前岛比较，

<sup>①</sup> 本例受 John K. Kruschke (2011) Doing Bayesian Data Analysis: A Tutorial with R and BUGS 书中“总统候选人巡岛演讲拉选票”章节启发。

最后决定是走还是留)。“两步随机试探法”的具体实施过程如下:

第一步——随机确定方向——向左还是向右:植物学家在某个岛屿上(假设在第5个岛)的考察时,他就“可能”会计划前往邻近岛屿(第4个岛或第6个岛),那到底是向左还是向右呢?这位植物学家通过随机掷一枚均匀硬币来决定,如果硬币为正面,他计划向左去第4个岛,如果硬币为反面,则他计划向右去第6个岛。

第二步——基于第一步的信息,部分随机确定意愿——出发还是停留:现在假设第一步硬币为正面,根据第一步规则,植物学家应该计划“可能”向左去第4个岛。但他是“可能”去,也“可能”不去。如何确定呢?统计学者给出的策略是,从当前岛(第5个岛)的管理者那里,可以得到目标岛(左面第4个岛)的植物种类数,比较目标岛和当前岛的植物种类数量,决定是否出发。

如果目标岛的植物种类数比所处当前岛的植物种类数多,那么植物学家就一定前往目标岛进行考察研究;如果目标岛的植物种类数比所处当前岛的少,那么植物学家又需要“另外一步随机试探法”来确定意愿——依概率出发或是停留。

什么是依概率出发呢?举例说明,我们假设目标岛有150种植物,而所处当期岛有200种植物,则去往目标岛的概率就为0.75(150/200),继续留在当期岛的概率为0.25(1-0.75)。那么植物学家到底出发还是停留呢?似乎还没有确切答案,此时的随机判断方法是:在地上画一条1米长的线段,然后随机向该线段内投一个石子,如果石子落在0和0.75米之间,则他就出发去目标岛考察研究;如果石子落在0.75和1之间,则他继续留在当前岛。

以上植物学家的随机试探方法本质上就是马氏链的转移矩阵,那么该植物学家设计的马式链的平稳分布(各个岛屿的考察研究的时间分布)是否与其目标分布(即各个岛屿的植物种类数分布)相同呢?我们用R软件来模拟结果<sup>①</sup>。

图A.4中的a显示出各个岛的相对植物种类数,这也是政客在各个岛屿逗留时间的目标分布。图A.4中的b显示出这位植物学家按照前述“两步随机试探法”进行了5000次转移,转移轨迹如图所示。注意图A.4中的b的移动轨迹,第一天,这位植物学家在最中间的岛即第5个岛上,第2天它仍然停留在第5个岛屿上,第3天他转移到了第4个岛屿上,第4天他转移到了第3个岛屿上,第5天他又回到了第4个岛屿上……。图A.4中的c显示在各个岛屿植物考察研究的频数直方图,可以看出,各岛屿被考察的相对频数与图A.4中的a显示出各个岛的相对植物种类数相似,两图走势是一样的,这也说明,植物学家设计的马式链的平稳分布与目标分布相同。

<sup>①</sup> 程序代码网址: <http://gaolei786.github.io/code/mcmc/>

上述过程反映了 M-H 算法抽取样本的基本原理。“千岛湖植物考察”的例子只是 M-H 算法的一种特殊情况：目标分布是一维离散分布，建议分布也是离散的，分别以 0.5 的概率建议向左或向右移动。M-H 算法更一般的是研究高维连续型分布，建议分布也更复杂，但实质与此例是相同的。

## 附录 B 后验分布密度的求解方法

$p(\Theta^* | D)$  是在  $\Theta^*$  处后验分布密度的取值。假设模型参数在后验均值处的取值为  $\Theta^* = (\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*, \log w^*, \log \theta^*)$ 。

按照条件概率的公式， $p(\Theta^* | D)$  可以展开如下：

$$\begin{aligned} p(\Theta^* | D) &= p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*, \log w^*, \log \theta^* | D) \\ &= p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^* | D) \times p(\log ult^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*) \\ &\quad \times p(\{\sigma_{ult}^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*) \\ &\quad \times p(\{\sigma^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*) \\ &\quad \times p(\log w^*, \log \theta^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \{\sigma^2\}^*) \end{aligned}$$

上式把复杂联合分布拆成了几个简单条件分布的乘积。就第一个乘积因子  $p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^* | D)$  而言，可进行如下变形：

$$\begin{aligned} &p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^* | D) \\ &= \int p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^* | D, \log ult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log w, \log \theta) \\ &\quad \times p(\log ult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log w, \log \theta | D) d \log ult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log w, \log \theta \\ &\approx \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^* | D, \log ult^{(g)}, \sigma_{ult}^{2(g)}, \sigma^{2(g)}, \log w^{(g)}, \log \theta^{(g)}) \end{aligned}$$

其中， $\log ult^{(g)}, \sigma_{ult}^{2(g)}, \sigma^{2(g)}, \log w^{(g)}, \log \theta^{(g)}$  是来自后验分布  $p(\log ult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log w, \log \theta | D)$  的样本，而在上一小节我们已经介绍了利用 Gibbs 采样抽取该后验分布样本的方法。因此通过上述变形，我们就把求解后验密度  $p(\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^* | D)$  的复杂问题，转化为计算样本均值的简单问题。

按照相同的思路将第二个乘积因子  $p(\log ult^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*)$  变形：

$$\begin{aligned}
& p(\log ult^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*) \\
&= \int p(\log ult^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log w, \log \theta) \\
&\quad \times p(\sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log w, \log \theta | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*) d\sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log w, \log \theta \\
&\approx \frac{1}{G} \sum_1^G p(\log ult^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \sigma_{ult}^{2(g)}, \sigma^{2(g)}, \log w^{(g)}, \log \theta^{(g)})
\end{aligned}$$

其中， $\sigma_{ult}^{2(g)}, \sigma^{2(g)}, \log w^{(g)}, \log \theta^{(g)}$  是来自后验分布  $p(\sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log w, \log \theta | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*)$  的样本。需要注意的是，后验分布  $p(\sigma_{ult}^2, \sigma^2, \log w, \log \theta | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*)$  是一个条件后验分布。为得到该后验分布的样本需要对上一小节介绍 Gibbs 采样进行修改： $\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*$  是确定的值，所以在 Gibbs 采样过程中，需要把第 2 步抽取  $\log ult_1, \dots, \log ult_l$  去掉，其他步骤不变。最终，我们把求解后验密度  $p(\log ult^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*)$  的复杂问题，转化为计算样本均值的简单问题。

同样，可将第三个乘积因子  $p(\{\sigma_{ult}^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*)$  变形如下：

$$\begin{aligned}
& p(\{\sigma_{ult}^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*) \\
&= \int p(\{\sigma_{ult}^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \sigma^2, \log w, \log \theta) \\
&\quad \times p(\sigma^2, \log w, \log \theta | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*) d\sigma^2, \log w, \log \theta \\
&\approx \frac{1}{G} \sum_1^G p(\{\sigma_{ult}^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma^2\}^{(g)}, \log w^{(g)}, \log \theta^{(g)})
\end{aligned}$$

其中， $\{\sigma^2\}^{(g)}, \log w^{(g)}, \log \theta^{(g)}$  是来自后验分布  $p(\sigma^2, \log w, \log \theta | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*)$  的样本。后验分布  $p(\sigma^2, \log w, \log \theta | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*)$  是一个条件后验分布，为得到该后验分布的样本需要对上一小节介绍 Gibbs 采样进行修改： $\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*$  以及  $\log ult^*$  是确定的值，所以在 Gibbs 采样过程中，需省略掉第 2 步抽取  $\log ult_1, \dots, \log ult_l$  和第 3 步抽取  $\log ult$  的过程，其他步骤不变。这样，我们把求解后验密度  $p(\{\sigma_{ult}^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*)$  的复杂问题，转化为计算样本均值的简单问题。

类似地，可将第四个乘积因子  $p(\{\sigma^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*)$  变形如下：



$$\begin{aligned}
& p(\{\sigma^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*) \\
&= \int p(\{\sigma^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*, \log w, \log \theta) \\
&\quad \times p(\log w, \log \theta | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*) d \log w, \log \theta \\
&\approx \frac{1}{G} \sum_1^G p(\{\sigma^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma^2\}^*, \log w^{(g)}, \log \theta^{(g)})
\end{aligned}$$

其中， $\log w^{(g)}, \log \theta^{(g)}$  是来自后验分布  $p(\log w, \log \theta | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*)$  的样本，后验分布  $p(\log w, \log \theta | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*)$  是一个条件后验分布，为得到该后验分布的样本需要对上一小节介绍 Gibbs 采样进行修改： $\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*$ 、 $\log ult^*$  以及  $\{\sigma_{ult}^2\}^*$  等都是确定的值，在 Gibbs 采样过程中，需要省略第 2 步抽取  $\log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*$ 、第 3 步抽取  $\log ult$  和第 4 步抽取  $\sigma_{ult}^2$  的过程。最终，我们把求解后验密度  $p(\{\sigma^2\}^* | D, \log ult_1^*, \dots, \log ult_l^*, \log ult^*, \{\sigma_{ult}^2\}^*)$  的复杂问题，转化为计算样本均值的简单问题。

## 附录 C 本文数据及程序资源

本文部分章节涉及数值计算，为此作者采用 R 软件进行编程。得益于 R 软件的免费、开源和分享特点，复杂的统计模型或方法均可在 R 软件中快速实现，R 软件是本文研究的良师益友。另外，考虑到贝叶斯模型的特点，本文还使用 BUGS 类软件程序（WinBUGS、OpenBUGS 等）进行 MCMC 模拟，对贝叶斯模型的参数进行估计。

为使学术交流更加方便，本文涉及的程序与数据均在开源社区 Github 上共享。在每章实证研究部分，给出数据和程序的下载地址，欢迎读者下载使用。不论是实务中对准备金风险感兴趣的精算师，还是学界关注准备金风险的研究人员，都可以利用这些程序快速实现本文的模型和方法，从而避免“重复制造轮子”的窘境。各章节程序地址汇总如下：

- (1) 博士论文中数据及程序（总）：<http://gaolei786.github.io/code/>
- (2) 第二章数据及程序代码：[http://gaolei786.github.io/code/reserve\\_risk/](http://gaolei786.github.io/code/reserve_risk/)
- (3) 第三章数据及程序代码：[http://gaolei786.github.io/code/block\\_boot/](http://gaolei786.github.io/code/block_boot/)
- (4) 第四章数据及程序代码：<http://gaolei786.github.io/code/car/>
- (5) 第五章数据及程序代码：<http://gaolei786.github.io/code/bma/>
- (6) 附录 A 程序代码：<http://gaolei786.github.io/code/mcmc/>

## 攻读博士学位期间发表的学术论文

- [1] 刘乐平, 高磊, 卢志义. 贝叶斯身世之谜——写在贝叶斯定理发表 250 周年之际[J]. 统计研究, 2013, 12:3-9.
- [2] 刘乐平, 高磊, 杨娜. MCMC 方法的发展与现代贝叶斯的复兴——纪念贝叶斯定理发现 250 周年[J]. 统计与信息论坛, 2014, 02:3-11. [中国人民大学书报资料中心复印报刊资料《统计与精算》全文转载 2014(3).]
- [3] 刘乐平, 高磊, 丁东洋. 残差相关条件下非寿险准备金风险分析[J]. 统计研究, 2015, 10:82-91.
- [4] 刘乐平, 高磊, 王洋. 基于贝叶斯对数正态模型的非寿险一年期准备金风险度量[J]. 中国管理科学, 2015, S1:470-475.
- [5] 高磊, 刘乐平, 卢志义. 大数据背景下贝叶斯模型平均的理论突破与应用前景[J]. 统计与信息论坛, 2016, 06:29-33
- [6] 刘乐平, 高磊, 王洋. SolvencyII 框架下非寿险一年期准备金风险的度量[J/OL]. 数理统计与管理, <http://www.cnki.net/kcms/detail/.20160531.1009.001.html>
- [7] 高磊, 朱祁恒. Charles Stein 小传[J]. 中国统计, 2014, 06:31-32.
- [8] 宋培培, 高磊. 为 Sally Clark 正名——一起冤案引起的统计思考[J]. 中国统计, 2015, 09:39-40.
- [9] 刘乐平, 高磊, 杨娜. Solvency II 框架下准备金风险及其随机模拟方法[A]. 北京大学中国保险与社会保障研究中心 (CCISSR). 建立社会公平保障体系与经济社会发展——北大赛瑟 (CCISSR) 论坛文集·2013[C]. 北京大学中国保险与社会保障研究中心 (CCISSR) :, 2013:14.

## 后记

时光总在不经意间流走，一转眼，这已经是来天财第五个年头了。蓦然回首，五年时光的点点滴滴历历在目，无论欢乐还是痛苦，无论成功还是失意，无论顺境还是逆境，都将成为人生中的一段风景。这一路走来，对于帮助我，关心我的老师和同学，我想借此机会，对你们说一声真诚的感谢。

我能够顺利地完成博士学业，首先要感谢我的授业恩师刘乐平教授。刘老师通过各种渠道为我提供发展平台，使我迅速成长。在生活上，刘老师划出自己的经费，连续三年为我提供资助，使我免除后顾之忧，刘老师还为我安排独立的办公室，让我拥有安静的学术研究环境；在教学实践方面，刘老师让我主讲 MCMC、R 软件等课程，给我锻炼的机会；在研究上，刘老师安排我参加学校创新基金、科研资助计划等，指导并鼓励我发表专业学术论文；在对外交流方面，刘老师带领我参加各种学术会议，例如北大赛瑟论坛，中国风险管理与精算论坛，IME 国际会议等，另外刘老师还资助我参加了各大高校的暑假短期课程，如北大统计科学中心高维统计短期课程（2013），华东师大统计学院暑期学校（2014 和 2015），我从这些培训交流中受益匪浅。感谢刘老师为我的发展所付出的辛苦，当我踏进天财园时，从未想过自己能够以博士毕业，是刘老师给了我这样一个机会，现在想来这真是命运的馈赠！在此，我郑重地向刘老师致以诚挚的敬意和衷心的感谢！希望刘老师身体健康，桃李满天下！

其次，我的博士论文的顺利完成，要感谢天津财经大学硕博连读项目的支持，感谢研究生院“研究生科研资助计划（2014,2015）”的资助。感谢天津财经大学研究生院负责研究生培养工作的各位老师，感谢你们多年来为学生发展的持续付出，你们辛苦了！

从学生公寓到干训宿舍，在财大生活五年。在天财园，日月流转，不变的是同学们的真诚陪伴。在这里我感谢我的研究生宿舍舍友和博士宿舍舍友，你们带给我欢乐，也容忍我不足，包容我缺点。我感谢我的朋友骆新珍，人们常说没有朋友的生活就像没有绿洲的沙漠！同时我还要感谢同门师兄师姐师弟师妹，感谢同级博士同学，遇到困难的时候，总有你们在身边，给予我支持鼓励。这里，我特别感谢卢志义师兄，感谢师兄在我求职过程中给予的莫大帮助。

最后，感谢我的爸爸妈妈，20 多年来你们任劳任怨无怨无悔巴结两个儿子求学，我毕业后会早点成家立业，让你们不要再这么操劳。另外感谢我的哥哥嫂子，你们也给予我大力支持。