贝叶斯模型平均方法在非寿险准备金评估中的应用研究

高磊

天津财经大学统计系

2015 年 6 月 26 日

目录

目录

多种多样的索赔准备金评估模型

保险研究 2013 年第 8 期　　INSURANCE STUDIES No. 8 2013

非寿险索赔准备金评估随机性模型与方法：文献述评

段白鸽

（复旦大学经济学院风险管理与保险学系，上海 200433）

[摘 要] 索赔准备金通常是非寿险公司资产负债表中份额最大的负债之一。在确定非寿险公司的经营业绩和偿付能力方面，都依赖于索赔准备金负债的准确评估。基于索赔准备金评估的两类数据结构，系统梳理了聚合数据结构和个体数据结构下的各种索赔准备金评估模型与方法。在此基础上，结合最新研究成果，提出了一些有待深入探索和进一步扩展的新思路。这些研究不但对提升我国非寿险精算学科的统计分析体系、促进我国非寿险精算学科的发展具有重要的科学研究意义，而且也可以为国内财险公司的随机性索赔准备金评估提供理论支持和实务参考。

[关键词] 索赔准备金；预测均方误差；预测分布；分层模型；贝叶斯方法

分层模型的迅速发展

山西财经大学学报
Journal of Shanxi Finance and Economics University

2013年10月 第35卷 第10期

Oct, 2013 Vol.35 No.10

金融·投资

索赔准备金评估的贝叶斯非线性分层模型

段白鸽[1],张连增[2]

(1. 复旦大学 经济学院,上海 200433;2. 南开大学 经济学院,天津 300071)

[摘　要] 基于贝叶斯非线性分层模型的一元索赔准备金评估随机性方法,设计了10种合适的模型结构,将非线性分层模型与贝叶斯方法结合起来,应用WinBUGS软件对精算实务中的经典流量三角形数据进行数值分析,并使用MCMC随机模拟方法得到了各种模型结构下最终损失和索赔准备金的完整预测分布及其分布特征。这种方法克服了其他准备金评估模型存在的缺陷,不但可以考虑不同事故年索赔进展的同质性和差异性,而且可以有效度量尾部进展的不确定性。

[关键词] 贝叶斯方法;分层模型;非线性增长曲线;索赔准备金评估;预测分布

模型不同结果也不一样

表 3　Loglogistic 增长曲线下不同模型得到的索赔准备金和最终损失的分布特征

模型	估计量	均值	标准差	MC 误差	2.5% 分位数	中位数	97.5% 分位数	取样起点	样本数
模型 1	准备金	32460.0	730.6	26.15	31070.0	32450.0	33930.0	5001	10000
	准备金均值	32460.0	730.5	26.21	31070.0	32450.0	33930.0	5001	10000
	截尾准备金	27680.0	688.8	22.44	26360.0	27670.0	29040.0	5001	10000
	截尾准备金均值	27680.0	688.6	22.51	26350.0	27670.0	29050.0	5001	10000
	最终损失	66820.0	730.6	26.15	65430.0	66810.0	68290.0	5001	10000
	最终损失均值	66820.0	730.5	26.21	65430.0	66810.0	68280.0	5001	10000
	截尾最终损失	62040.0	688.8	22.44	60720.0	62030.0	63400.0	5001	10000
	截尾最终损失均值	62040.0	688.6	22.51	60710.0	62030.0	63410.0	5001	10000

表 4　Weibull 增长曲线下不同模型得到的索赔准备金和最终损失的分布特征

模型	估计量	均值	标准差	MC 误差	2.5% 分位数	中位数	97.5% 分位数	取样起点	样本数
模型 1	准备金	19970.0	623.8	20.44	18830.0	19950.0	21270.0	5001	10000
	准备金均值	19970.0	622.9	20.41	18830.0	19950.0	21250.0	5001	10000
	截尾准备金	19960.0	623.8	20.37	18810.0	19940.0	21240.0	5001	10000
	截尾准备金均值	19960.0	622.9	20.38	18820.0	19940.0	21240.0	5001	10000
	最终损失	54330.0	623.8	20.44	53190.0	54310.0	55630.0	5001	10000
	最终损失均值	54330.0	622.9	20.41	53190.0	54310.0	55610.0	5001	10000
	截尾最终损失	54320.0	623.8	20.37	53170.0	54290.0	55600.0	5001	10000
	截尾最终损失均值	54320.0	622.9	20.38	53180.0	54290.0	55600.0	5001	10000

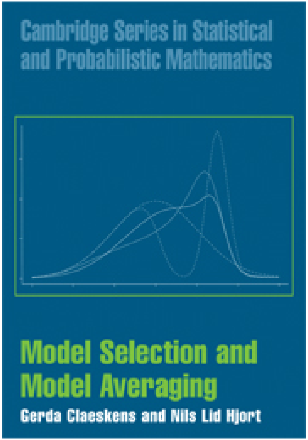
随之而来的模型不确定性问题

- 模型模型不确定性问题（段白鸽，2014）

最后指出，与多元 CL 方法、多元 ALR 方法和混合方法一样，本文也没有涉及关于模型的选择问题，只是将贝叶斯非线性分层模型应用于同样的数据集。当然，由于同样的数据集可能很难满足不同模型的假设，故这会导致一些矛盾。然而，本文进行这些分析仅仅出于示例的目的，忽略了正确的模型选择问题。关于模型选择和模型误差的问题可能是最困难的，通常没有相应的统计方法可以回答这样的问题。也就是说，在大多数情况下，关于索赔进展结果的专家意见和长期经验可能是一个好的模型选择的唯一指标。

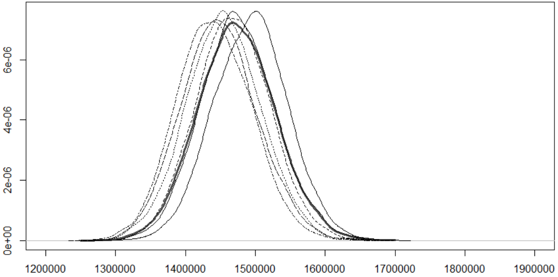
来自于统计的解决方案

- Model Selection and Model Averaging(Claeskens and Hjort,2008)



贝叶斯模型平均

- Bayesian Model Averaging



贝叶斯模型平均理论（Hoeting et al., 1999）

- Δ 是我们感兴趣的预测
- $M_1, \ldots, M_K$ 是备选模型
- θ_k 是模型 M_k 下的参数向量
- $p(\theta_k|M_k)$ 表示模型 M_k 下的参数 θ_k 的先验分布
- $p(D|\theta_k, M_k)$ 表示在给定模型 M_k 和参数 θ_k 下, 观测数据 D 的似然函数
- $p(M_k)$ 表示模型 M_k 的先验概率

贝叶斯模型平均理论（Hoeting et al., 1999）

- 在观测数据 D 给定的条件下，通过 BMA 得到的 Δ 的后验分布是

$$p(\Delta|D) = \sum_{k=1}^{K} p(\Delta|M_k, D)p(M_k|D)$$

- $p(M_k|D)$ 是备选模型 M_k 的后验概率，而 $p(\Delta|M_k, D)$ 是在备选模型 M_k 下 Δ 的后验分布
- 备选模型的后验概率 $p(M_k|D)$

$$p(M_k|D) = \frac{p(D|M_k)p(M_k)}{\sum_{l=1}^{K} p(D|M_l)p(M_l)}$$

- 模型 M_k 的边际似然 $p(D|M_k)$:

$$p(D|M_k) = \int p(D|\theta_k, M_k)p(\theta_k|M_k)d\theta_k$$

贝叶斯模型平均应用难点

- 设定参数先验分布 $p(\theta_k|M_k)$ 和模型先验分布 $p(M_k)$
- 计算模型 M_k 的边际似然 $p(D|M_k)$:

$$p(D|M_k) = \int p(D|\theta_k, M_k)p(\theta_k|M_k)d\theta_k$$

- 搜索模型空间 $M = \{M_1, \ldots, M_K\}$

目录

贝叶斯非线性分层模型假设

- $i \in \{1,...,I\}$ 表示事故年,$j \in \{1,...,J\}$ 表示进展年
- $C_{i,j}$ 表示事故年 i 在进展年 j 的累计赔款，假设

$$logC_{i,j} \sim N(logult_i + logG(j;\theta), \sigma^2)$$

- 参数的共轭分层结构

$$logult_i \sim N(logult, \sigma^2_{ult})$$

$$logult|\sigma^2_{ult} \sim N(log\mu_0, \frac{\sigma^2_{ult}}{k_0})$$

$$\sigma^2_{ult} \sim Inv-\chi^2(v_0, \sigma^2_0)$$

$$\sigma^2 \sim Inv-\chi^2(v_1, \sigma^2_1)$$

贝叶斯非线性分层模型假设

- 备选模型 M_1:Loglogistic 增长曲线 $G(j;\theta)=\frac{(j-0.5)^w}{(j-0.5)^w+\theta^w}$

$$logw \sim N(0,100^2);\, log\theta \sim N(0,100^2)$$

- 备选模型 M_2:Weibull 增长曲线 $G(j;\theta)=1-exp(-(\frac{j-0.5}{\theta})^w)$

$$logw \sim N(0,100^2);\, log\theta \sim N(0,100^2)$$

贝叶斯非线性分层模型参数估计：Gibbs Sampling

- $logult_1, \ldots, logult_I, logult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, w, \theta$
- $p(logult_i | \mathrm{D}, logult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, w, \theta) = N(logult_i | mean_i, var_i)$

$$mean_i = \frac{\frac{1}{\sigma^2 / I+1-i} \frac{\sum_{j=1}^{I+1-i} logC_{i,j} - logG(j;\Theta)}{I+1-i} + \frac{1}{\sigma_{ult}^2} logult}{\frac{1}{\sigma^2 / I+1-i} + \frac{1}{\sigma_{ult}^2}}$$

$$var_i = \frac{1}{\frac{1}{\sigma^2 / I+1-i} + \frac{1}{\sigma_{ult}^2}}$$

- $p(logult | \mathrm{D}, logult_1, \ldots, logult_I, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, w, \theta) = N(logult | mean, var)$

$$mean = \frac{\frac{k_0}{\sigma_{ult}^2} log\mu_0 + \frac{I}{\sigma_{ult}^2} \frac{\sum_{i=1}^{I} logult_i}{I}}{\frac{k_0}{\sigma_{ult}^2} + \frac{I}{\sigma_{ult}^2}}$$

$$var = \frac{1}{\frac{k_0}{\sigma_{ult}^2} + \frac{I}{\sigma_{ult}^2}}$$

贝叶斯非线性分层模型参数估计：Gibbs Sampling

- $p(\sigma^2_{ult}|D, logult_1, \ldots, logult_I, logult, \sigma^2, w, \theta) = Inv - \chi^2(\sigma^2_{ult}|d_1, s_1)$

$$d_1 = I + v_0 + 1$$

$$s_1 = \frac{\sum_{i=1}^{I}(logult_i - logult)^2 + k_0(logult - \mu_0)^2 + v_0\sigma_0^2}{I + v_0 + 1}$$

- $p(\sigma^2|D, logult_1, \ldots, logult_I, logult, \sigma^2_{ult}, w, \theta) = Inv - \chi^2(\sigma^2|d_2, s_2)$

$$d_2 = v_1 + I(I+1)$$

$$s_2 = \frac{\sum^{I} i = 1 \sum_{j=1}^{I+1-i}(logC_{i,j} - logult_i - logG(j;\Theta))^2 + v_1\sigma_1^2}{v_1 + I(I+1)}$$

贝叶斯非线性分层模型参数估计：Gibbs Sampling

- $p(w, \theta | \mathrm{D}, logult_1, \ldots, logult_I, logult, \sigma^2_{ult}, \sigma^2)$
  $\propto e^{-\frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{I+1-i}(logC_{i,j} - logult_i - logG(j;\Theta))^2}{2\sigma^2}} N(logw|0, 100^2) N(log\theta|0, 100^2)$
- Metropolis-Hastings 算法

```
library(LearnBayes)
fit <- laplace(logpost, c(0, 0),dd )
proposal <- list(var = fit$var, scale = 2)
r <- rwmetrop(logpost, proposal, start = fit$mode, m = 10, dd)
```

求解模型边际似然：Chib's Method

- 模型 M_k 的边际似然 $p(D|M_k)$:

$$p(D|M_k) = \int p(D|\theta_k, M_k)p(\theta_k|M_k)d\theta_k$$

$$p(D) = \int p(D|\theta)p(\theta)d\theta$$

- 基本边际似然等式（Basic marginal likelihood identity, BMI）

$$p(\theta|D) = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{p(D)} \Rightarrow p(D) = \frac{p(D|\theta)p(\theta)}{p(\theta|D)}$$

- 上式对于任意 θ 都成立，令 $\theta = \theta^\star$

$$p(D) = \frac{p(D|\theta^\star)p(\theta^\star)}{p(\theta^\star|D)}$$

求解模型边际似然：Chib's Method

- $p(ABCDE) = p(A)p(B|A)p(C|A,B)p(D|A,B,C)p(E|A,B,C,D)$
- $p(logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star, logult^\star, \sigma_{ult}^{2\star}, \sigma^{2\star}, w^\star, \theta^\star|\mathrm{D})$
  $= p(logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star|\mathrm{D}) \times \mathrm{p}(logult^\star|\mathrm{D}, logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star) \times$
  $p(\sigma_{ult}^{2\star}|\mathrm{D}, logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star, logult^\star) \times$
  $p(\sigma^{2\star}|\mathrm{D}, logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star, logult^\star, \sigma_{ult}^{2\star}) \times$
  $p(w^\star, \theta^\star|\mathrm{D}, logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star, logult^\star, \sigma_{ult}^{2\star}, \sigma^{2\star})$

求解模型边际似然：Chib's Method

- $p(A) = \int p(A|B)p(B)dB$
- $p(logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star|D) =$
  $$\int p(logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star|D, logult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, w, \theta)$$
  $$p(logult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, w, \theta|D) dlogult, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, w, \theta$$
  $$\approx \frac{1}{G}\sum_{g=1}^{G} p(logult_1, \ldots, logult_I|D, logult^{(g)}, \sigma_{ult}^{2(g)}, \sigma^{2(g)}, w^{(g)}, \theta^{(g)})$$
- $p(logult^\star|D, logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star) =$
  $$\int p(logult^\star|D, logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star, \sigma_{ult}^2, \sigma^2, w, \theta)$$
  $$p(\sigma_{ult}^2, \sigma^2, w, \theta|D, logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star) d\sigma_{ult}^2, \sigma^2, w, \theta$$
  $$\approx \frac{1}{G}\sum_{1}^{G} p(logult^\star|D, logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star, \sigma_{ult}^{2(g)}, \sigma^{2(g)}, w^{(g)}, \theta^{(g)})$$
- ……

求解模型的后验概率

- 两种增长曲线模型的边际似然 $p(D|M_1), p(D|M_2)$
- 两种增长曲线模型的后验概率

$$p(M_1|D) = \frac{p(D|M_1)p(M_1)}{p(D|M_1)p(M_1) + p(D|M_2)p(M_2)}$$

$$p(M_2|D) = \frac{p(D|M_2)p(M_2)}{p(D|M_1)p(M_1) + p(D|M_2)p(M_2)}$$

两种模型估计结果的贝叶斯模型平均

- 两种增长曲线模型未决赔款预测分布的加权平均

$$p(\Delta|D) = p(\Delta|M_1, D)p(M_1|D) + p(\Delta|M_2, D)p(M_2|D)$$

- 两种增长曲线模型准备金估计的加权平均

$$E(\Delta|D) = E(\Delta|M_1, D)p(M_1|D) + E(\Delta|M_2, D)p(M_2|D)$$

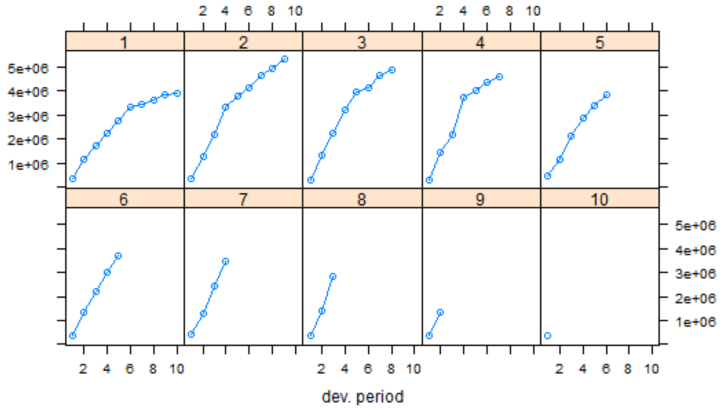
目录

实证研究：数据来源

- 来自于 Taylor and Ashe(1983) 的数据

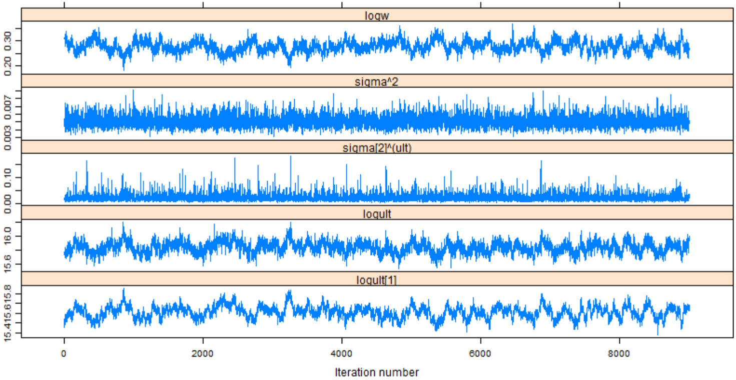
accyear \ devyear	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	357848	1124788	1735330	2218270	2745596	3319994	3466336	3606286	3833515	3901463
1	352118	1236139	2170033	3353322	3799067	4120063	4647867	4914039	5339085	NA
2	290507	1292306	2218525	3235179	3985995	4132918	4628910	4909315	NA	NA
3	310608	1418858	2195047	3757447	4029929	4381982	4588268	NA	NA	NA
4	443160	1136350	2128333	2897821	3402672	3873311	NA	NA	NA	NA
5	396132	1333217	2180715	2985752	3691712	NA	NA	NA	NA	NA
6	440832	1288463	2419861	3483130	NA	NA	NA	NA	NA	NA
7	359480	1421128	2864498	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
8	376686	1363294	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA
9	344014	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA	NA

累计赔款进展曲线



loglogistic 增长曲线模型的参数估计结果

- 参数 MCMC 模拟样本轨迹图

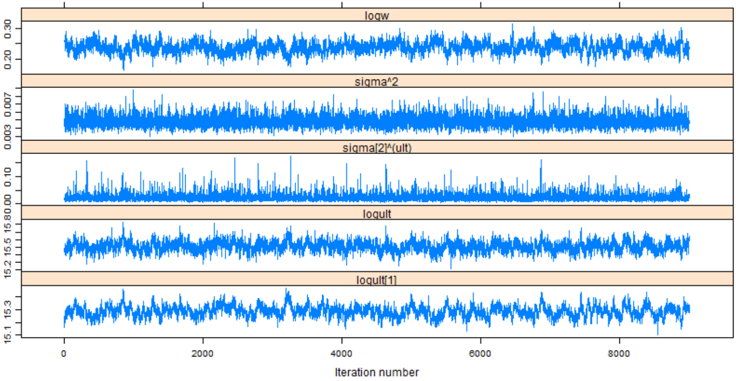


Loglogistic 增长曲线模型的边际似然

- $logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star = \{15.60976, 15.85468, 15.83785, 15.88560,$ 15.81816, 15.85969, 15.93543, $15.93629, 15.87166, 15.80603\}$
  $logult^\star = 15.84183$
  $\sigma_{ult}^{2\star} = 0.02193477$
  $\sigma^{2\star} = 0.004657048$
  $logw^\star, log\theta^\star = c(0.2775962, 1.5781060)$
- $log(p(logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star, logult^\star, \sigma_{ult}^{2\star}, \sigma^{2\star}, w^\star, \theta^\star))=$ -22.20366
- $log(p(D|logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star, logult^\star, \sigma_{ult}^{2\star}, \sigma^{2\star}, w^\star, \theta^\star))=$ 54.72542
- $log(p(logult_1^\star, \ldots, logult_I^\star, logult^\star, \sigma_{ult}^{2\star}, \sigma^{2\star}, w^\star, \theta^\star|\mathrm{D})) = 42.62777$
- $log(p(D)) = -22.20366 + 54.72542 - 42.62777 = -10.106$

Weibull 增长曲线模型的参数估计结果

- 参数 MCMC 模拟样本轨迹图



Weibull 增长曲线模型的边际似然

- $logult_1^{\star}, \ldots, logult_I^{\star} = \{15.28463, 15.52554, 15.50548, 15.55135, 15.48338, 15.52610, 15.60456, 15.60859, 15.54518, 15.47311\}$
  $logult^{\star} = 15.5111$
  $\sigma_{ult}^{2\star} = 0.02172379$
  $\sigma^{2\star} = 0.00444365$
  $logw^{\star}, log\theta^{\star} = c(0.2377815, 1.4194950)$
- $log(p(logult_1^{\star}, \ldots, logult_I^{\star}, logult^{\star}, \sigma_{ult}^{2\star}, \sigma^{2\star}, w^{\star}, \theta^{\star})) =$ -22.60809
- $log(p(D|logult_1^{\star}, \ldots, logult_I^{\star}, logult^{\star}, \sigma_{ult}^{2\star}, \sigma^{2\star}, w^{\star}, \theta^{\star})) =$ 56.53525
- $log(p(logult_1^{\star}, \ldots, logult_I^{\star}, logult^{\star}, \sigma_{ult}^{2\star}, \sigma^{2\star}, w^{\star}, \theta^{\star}|\mathrm{D})) = 43.35839$
- $log(p(D)) = -22.60809 + 56.53525 - 43.35839 = -9.431224$

求解备选模型的后验概率

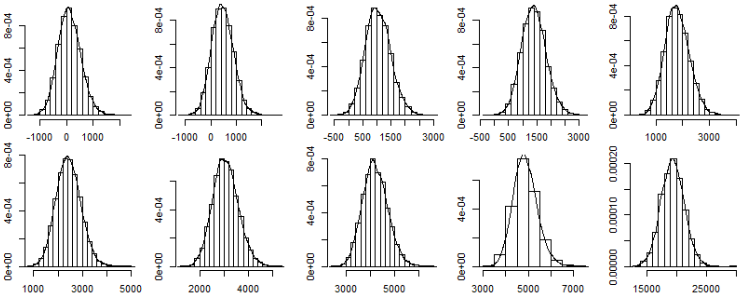
- 两种增长曲线模型的先验概率 $p(M_1) = 0.5, p(M_2) = 0.5$
- 两种增长曲线模型的后验概率

$$p(M_1|D) = \frac{e^{-10.106} \times 0.5}{e^{-10.106} \times 0.5 + e^{-9.431224} \times 0.5} = 0.3374$$

$$p(M_2|D) = \frac{e^{-9.431} \times 0.5}{e^{-10.106} \times 0.5 + e^{-9.431224} \times 0.5} = 0.6626$$

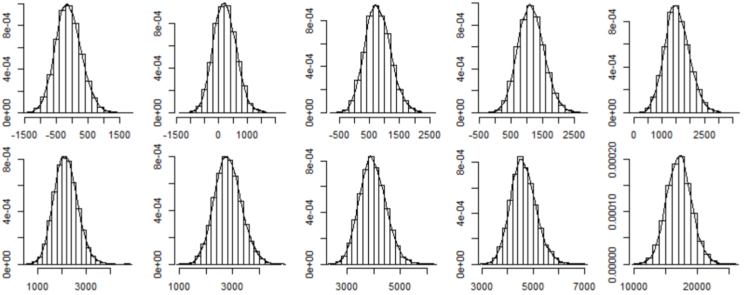
Loglogistic 增长曲线模型的未决赔款 (截尾) 预测分布

- 各事故年及总未决赔款预测分布



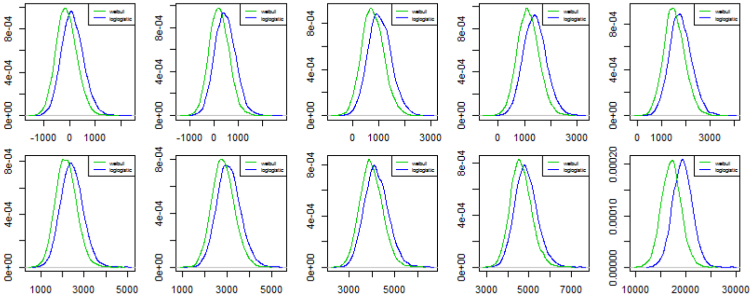
Weibull 增长曲线模型的未决赔款 (截尾) 预测分布

- 各事故年及总未决赔款预测分布



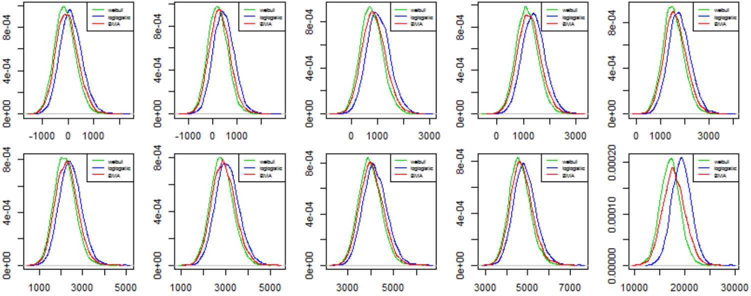
两种增长曲线模型的未决赔款 (截尾) 预测分布

- 各事故年及总未决赔款预测分布



BMA 后的未决赔款 (截尾) 预测分布

- 各事故年及总未决赔款预测分布



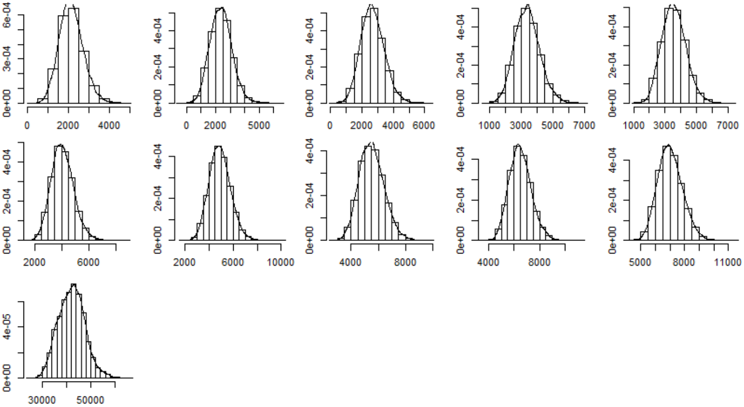
未决赔款（截尾）的统计特征

- 各事故年及总未决赔款统计特征

事故年	Loglogistic 增长曲线模型		Weibull 增长曲线模型		贝叶斯模型平均	
	准备金	标准差	准备金	标准差	准备金	标准差
2	115.4381	423.6905	-117.049	403.5073	-38.9719	426.0777
3	459.0171	424.8535	213.4151	402.0928	293.7662	424.2886
4	1042.546	445.4981	775.0662	423.3644	865.1856	449.0252
5	1392.26	431.8146	1139.35	409.1398	1223.715	432.0263
6	1791.84	453.0363	1534.946	431.1415	1622.288	455.5509
7	2435.347	503.804	2173.199	478.7098	2263.135	503.2318
8	3067.514	520.3893	2822.483	494.8373	2905.991	516.757
9	4194.492	515.884	3971.357	489.0373	4046.374	510.7378
10	4862.961	528.3086	4621.731	497.5556	4703.833	521.3853
总计	19361.42	1921.303	17134.5	1929.625	17893.28	2191.735

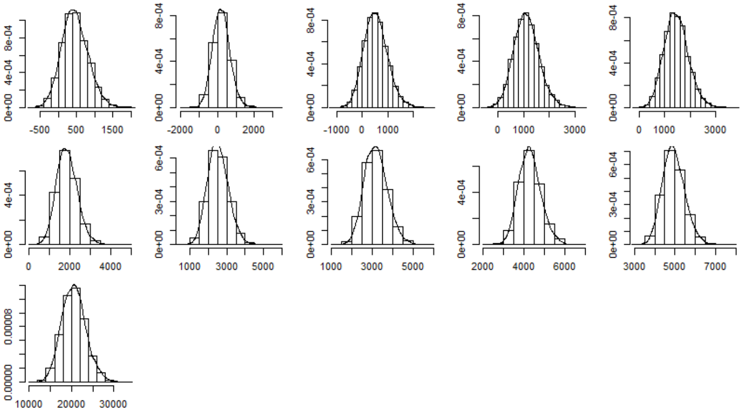
Loglogistic 增长曲线模型的未决赔款预测分布

- 各事故年及总未决赔款预测分布



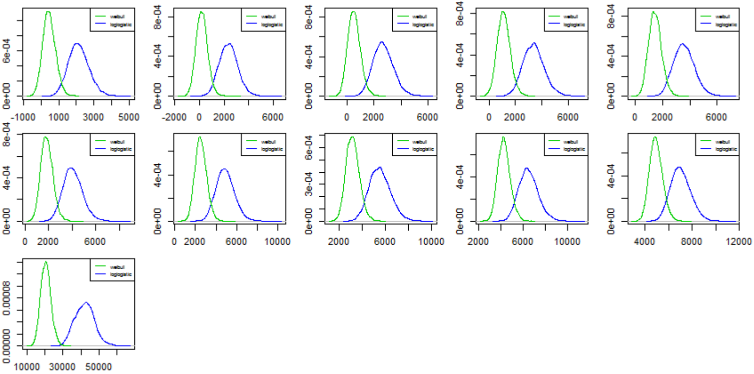
Weibull 增长曲线模型的未决赔款预测分布

- 各事故年及总未决赔款预测分布



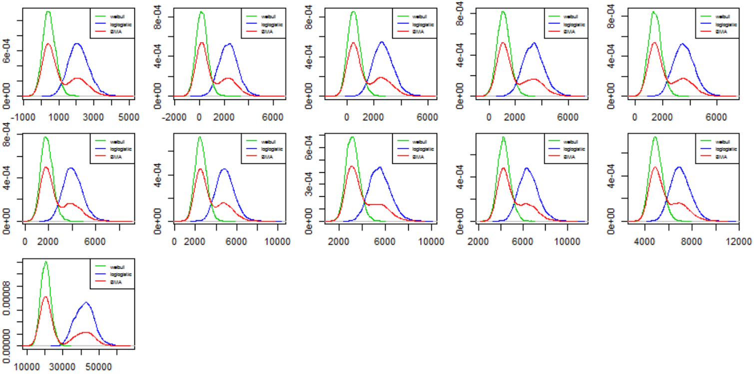
两种增长曲线模型的未决赔款预测分布

- 各事故年及总未决赔款预测分布



BMA 后的未决赔款预测分布

- 各事故年及总未决赔款预测分布



未决赔款的统计特征

- 各事故年及总未决赔款统计特征

事故年	Loglogistic 增长曲线模型		Weibull 增长曲线模型		贝叶斯模型平均	
	准备金	标准差	准备金	标准差	准备金	标准差
1	2136.237	580.3215	459.1089	360.6	1019.215	908.7643
2	2372.446	745.8818	208.158	463.5225	942.5756	1175.426
3	2678.436	742.2835	531.2988	462.1979	1268.455	1169.325
4	3371.505	793.4977	1107.98	491.7428	1872.089	1237.909
5	3565.941	756.4723	1447.452	468.9227	2154.832	1150.738
6	4061.38	816.5268	1859.999	509.3264	2606.324	1212.457
7	4891.407	888.858	2529.67	557.8049	3330.624	1309.468
8	5520.369	909.0391	3174.244	569.8271	3968.971	1318.259
9	6491.92	862.7052	4301.564	549.1373	5043.066	1226.107
10	7017.663	844.478	4931.403	546.1368	5623.212	1189.656
总计	$\boxed{42107.31}$	5381.567	$\boxed{20550.88}$	2838.919	$\boxed{27830.15}$	10921.38

结论

- 贝叶斯模型平均方法以贝叶斯定理为基础，与准备金评估的贝叶斯模型具有理论上的一致性，MCMC 等模拟算法为贝叶斯模型平均方法的实现提供了可能。
- 贝叶斯模型平均方法解决了准备金评估的模型选择问题，为准备金评估提供了新思路。
- 从某种意义上说，因为模型平均方法综合了各个模型的优势，所以模型平均比选择单一模型更具有吸引力。

参考文献

- 段白鸽. 非寿险索赔准备金评估随机性模型与方法: 文献述评 [J]. 保险研究, 2013 (8): 66-77.
- 段白鸽, 张连增. 索赔准备金评估的贝叶斯非线性分层模型 [J]. 山西财经大学学报, 2013, 35(10): 20-31.
- 段白鸽. 贝叶斯非线性分层模型在多元索赔准备金评估中的应用 [J]. 数量经济技术经济研究, 2014, 31(3): 148-160.
- Hoeting J A, Madigan D, Raftery A E, et al. Bayesian model averaging: a tutorial[J]. Statistical science, 1999: 382-401.
- Taylor G C, Ashe F R. Second moments of estimates of outstanding claims[J]. Journal of Econometrics, 1983, 23(1): 37-61.

参考文献

- Gelman A, Carlin J B, Stern H S, et al. Bayesian data analysis[M]. London: Chapman & Hall/CRC, 2014.
- Gelfand A E, Hills S E, Racine-Poon A, et al. Illustration of Bayesian inference in normal data models using Gibbs sampling[J]. Journal of the American Statistical Association, 1990, 85(412): 972-985.
- Albert J. Bayesian computation with R[M]. Springer Science & Business Media, 2009.
- Chib S. Marginal likelihood from the Gibbs output[J]. Journal of the American Statistical Association, 1995, 90(432): 1313-1321.
- Chib S, Jeliazkov I. Marginal likelihood from the Metropolis–Hastings output[J]. Journal of the American Statistical Association, 2001, 96(453): 270-281.

谢谢大家！